Universidad Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION.
BINOMIAL DISTRIBUTION

Autora

Susana González Royo

Directora

Alejandra S. Córdova Martínez

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020

ÍNDICE

A. OBJETO MATEMÁTICO

A.1.Objeto matemático a enseñar.

La parte desconocida en la mayoría de la población sobre el estudio de las matemáticas es que es una de las tareas más importantes que como personas debemos tener no solo en nuestra etapa educativa, sino en toda nuestra existencia. Las matemáticas son una base del conocimiento, necesaria para comprender el mundo en el que vivimos, y en opinión de quien suscribe estas líneas, más aún quizás el estudio que se realiza en la etapa de Bachillerato, en la rama de Ciencias Sociales.

La base del estudio, en general, en la etapa de bachillerato, se centra en la formación y especialización mínima que se debe obtener para acceder a la educación superior. Esta afirmación viene motivada porque en la práctica se empieza a encauzar la rama de conocimiento donde una persona quiere especializarse y formarse, siendo la rama de las Matemáticas donde se estudia la probabilidad, en mi opinión, la que con más facilidad se puede relacionar con la realidad.

El objeto matemático que se pretende enseñar es el Cálculo de Probabilidades, centrándolo en las variables discretas, donde se estudia la variable binomial como principal representante de este tipo de distribuciones.

A.2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático.

Este estudio se centra en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, de 1º de Bachillerato, donde se afianzan los conocimientos adquiridos en los cursos anteriores sobre el Cálculo de Probabilidades.

En este aspecto, el aprendizaje se centra en el estudio y análisis de la distribución binomial, que posteriormente van a tener una gran importancia y peso en la formación del alumnado. Por ello es importante destacar el campo de problemas, las técnicas y las tecnologías que se van a enseñar y que se relacionan en las siguientes líneas.

A.3. Campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretenden enseñar.

Los campos de problemas asociados al objeto matemático que se pretende enseñar, son los siguientes:

CP1: Aplicación de la combinatoria al cálculo de Probabilidades.

CP2: Obtener y diferenciar la distribución estadística y la distribución de probabilidad de una variable y los parámetros μ(media) y σ^2(varianza).

CP3: Obtener la probabilidad de éxito de la distribución, es decir, calcular las probabilidades de una distribución binomial y sus parámetros.

<u>Técnicas</u>:

En la resolución de problemas debemos tener en cuenta cómo se van a resolver. La respuesta a esta pregunta son las técnicas. A continuación, se recogen todas las técnicas que se aplican en la resolución de los problemas:

T1. Técnicas de Combinatoria.

T2. Aplicación de la Regla de Laplace.

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad.

T5. Representar mediante diagrama de barras.

T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza..

T7. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial.

Tecnologías*:*

En las tecnologías tenemos varias definiciones o teoremas que hacen que podamos aplicar las técnicas anteriormente expuestas, es decir, es el resultado teórico que sustenta la técnica: las definiciones o teoremas que las justifican. Hay alguna de las tecnologías que se repite, y otras, debido a su complejidad, no se explican en esta unidad. Las tecnologías utilizadas en la unidad didáctica son las que se enumeran a continuación:

TE1. Regla de Laplace.

TE2. Teorema de la Probabilidad Total.

TE3. Teorema de Bayes.

TE4. Definición de Proporcionalidad.

TE5. Representación gráfica de valores.

TE6. Definición de Combinatoria.

B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

B.1. Cómo se justifica habitualmente la introducción del objeto matemático

Salvador, Brihuega y Pérez (1995) indican el significado que tiene la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, que deben marcar la base de la enseñanza en Matemáticas:

> La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, deben servir para desarrollar capacidades cognitivas, que, por un lado, contribuyan al desarrollo de la persona y, por otro, tengan una incidencia relevante en la comprensión e interpretación del mundo físico y de las ciencias humanas y sociales, permitiendo resolver problemas en diferentes campos, poniendo de relieve aspectos y relaciones de la realidad no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados antes de que se produzcan o se observen empíricamente. Por tanto, las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales han de contemplar no sólo el aspecto funcional, sino, también, y de forma indisoluble, el formativo. (Salvador, Brihuega y Pérez, 1995, p.7)

Es importante poder conocer cuál ha sido la evolución del tratamiento de la Probabilidad, en este caso, a lo largo de la reciente legislación educativa, aunque no es muy sencillo encontrar textos que hagan referencia a ello. Nortes Checa (1998), presenta una buena exposición de ello, desde la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa de 1970 hasta la LOGSE (Ley Orgánica General del Sistema Educativo).

El Real Decreto 1178/1992, de 2 de octubre, recoge una serie de objetivos generales, que se concretan en los contenidos propios de la asignatura Matemáticas I (la equivalente ahora a Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º de Bachillerato) en lo que se refiere al objeto de estudio de este trabajo como: “Distribuciones probabilidad binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.”

> De entre los 8 OBJETIVOS GENERALES hay uno específico que se refiere a la Estadística y Probabilidad que dice “Utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos para interpretar críticamente los mensajes, datos e informaciones que aparecen en los medios de comunicación y otros ámbitos sobre cuestiones económicas y sociales de la actualidad (RD 1178/1992).”(Nortes Checa, 1998, p. 7).

En los párrafos anteriores los distintos autores han ido mostrando la variación en la consideración de la Probabilidad en el currículo de Bachillerato, y en la investigación de Rodríguez Muñiz y Díaz (2018) ya se explica claramente que la enseñanza actual de la estadística y la probabilidad, es similar a las tendencias internacionales, donde se considera como una base del estudio la cultura estadística. Este hecho se observa dada la continuidad con respecto a contenidos que han tenido las últimas leyes educativas, hasta la actual, la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa).

Con respecto al razonamiento probabilístico:

> Landín y Sánchez (2016) señalan que una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y es capaz de modelarlas, cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento, puede determinar la probabilidad de eventos, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y las utiliza para hacer inferencias.(Cid, Retamal y Alvarado, s.f, p.3)

Analizando el texto anterior se podría afirmar que, en mi opinión, es la argumentación que justifica mejor la importancia del estudio de la probabilidad en general, y que puede ser extrapolable a la distribución binomial, que es el objeto que se trata en este trabajo.

Por lo tanto, y como se ha ido exponiendo en todo este apartado, el objeto matemático que se presenta en este Trabajo fin de Máster, se presenta como la necesidad de comprender el medio en el que vivimos y analizar y predecir aquellas circunstancias que se nos presentan en la vida.

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

Para poder analizar los campos de problemas, técnicas tecnologías que se enseñan habitualmente, es imprescindible el realizar una comparativa de entre algunos libros, que permita observar las diferencias y similitudes que existen con respecto al estudio del objeto matemático.

Son varios los libros de texto que se utilizan como base para poder enseñar la distribución binomial, y cada uno de ellos propone su estudio de una forma distinta, que hace que haya notables diferencias entre unos y otros autores. En este caso concreto, se ha tomado de referencia dos de esos libros de texto de 1º de Bachillerato Aplicado a las Ciencias Sociales: el de la editorial Anaya y el libro de Marea Verde, donde cada capítulo o tema está elaborado por distintos autores.

El libro de Anaya plantea el estudio en una Unidad Didáctica en la que realiza un breve repaso de la probabilidad, de los conceptos de probabilidad hasta el cálculo de probabilidades de experiencias compuestas con o sin remplazamiento, pasando por el Teorema de Bayes.

Todos estos campos de problemas son tratados en la primera parte de una unidad previa a la distribución binomial por parte del libro de Marea Verde, que realiza un repaso más amplio añadiendo la definición de sucesos y las tablas de contingencia.

Siguiendo con el libro de Anaya, una vez realizado el repaso de la probabilidad, se introduce en el cálculo de las distribuciones de frecuencias absolutas y relativas y de probabilidad, calculando la media y varianza en cada caso. Posteriormente, se realiza un estudio de las variables discretas para continuar con la distribución binomial como ejemplo de estas variables. Este aspecto, no lo plantea de esta forma el libro de Marea Verde, sino que solamente se estudian las distribuciones de probabilidad y aparece el término "esperanza matemática" como la media y que permite también calcular la varianza a través de ella. En este punto hay una notable diferencia en la forma de plantear el estudio de la variable discreta.

Para la explicación de la distribución binomial, Marea Verde inicia la explicación a través de la combinatoria y el diagrama de árbol, para llegar de esta forma a la fórmula del cálculo de la probabilidad en una distribución binomial. El libro de Anaya realiza varios ejemplos de variables dicotómicas y cómo se llega a la binomial, para plantear directamente el cálculo de probabilidades.

Una parte muy importante que se trabaja en el libro de Marea Verde son las distribuciones de probabilidad. Este libro dedica la primera parte del tema a este estudio junto con la Función de Probabilidad y Función de Distribución. Es necesario destacar que solamente se mencionan y se listan las propiedades, pero el mero hecho de hacerlo, indica que el aprendizaje de las distribuciones de probabilidad se realiza teniendo en cuenta todas las partes.

Para el estudio de los parámetros, el libro de Anaya va calculando la media, varianza y desviación típica de las tres distribuciones que plantea (frecuencias relativas, absolutas y de probabilidad) para finalmente indicar la fórmula de la media y la varianza de la distribución binomial. El libro de Marea Verde, comienza explicando el concepto de Esperanza Matemática relacionándolo con la media, parte importante para el estudio posterior de las distribuciones de probabilidad, y calculando la varianza a través de la esperanza matemática y cómo se aplica esto a la distribución binomial.

Por lo tanto, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente, son los siguientes, recogidos de forma resumida por libro de texto, en la siguiente tabla:

Tabla 1

Campos de problemas, técnicas y tecnologías de los libros estudiados

Libro	Anaya	Marea Verde
Campos de Problemas		
Aplicación combinatoria al cálculo de probabilidades		X
Distribución de frecuencias absolutas	X	
Distribución de frecuencias relativas	X	
Distribución de probabilidad	X	X
Distribuciones de variable discreta	X	
Cálculo probabilidades de distribución binomial	X	X
Técnicas		
Técnicas de Combinatoria.		X
Aplicación de la Regla de Laplace.	X	X
Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.	X	X
Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad.	X	X
Representar mediante diagramas de barras.	X	X
Aplicación de las fórmulas de la media, varianza y desviación típica.	X	X
Esperanza Matemática		X
Parámetros distribución binomial	X	X
Ajuste de datos a una distribución binomial	X	
Tecnologías		
Regla de Laplace	X	X

Teorema de la Probabilidad total	X	X
Teorema de Bayes	X	X
Proporcionalidad	X	X
Sucesos aleatorios	X	X
Ley de los grandes números	X	X
Función de Probabilidad		X
Función de distribución		X
Representación gráfica	X	X
Combinatoria	X	X

En líneas generales, los campos de problemas que se estudian son los mismos. La diferencia radica en el repaso de la probabilidad que se hace antes de abordar la distribución binomial y en la introducción de conceptos como esperanza matemática, función de distribución y función de probabilidad.

En cuanto a las técnicas utilizadas para resolver los problemas, también se encuentran algunas diferencias entre los dos libros de texto. La diferencia principal se encuentra en que el Libro de Marea Verde incluye más campos de problemas que el de Anaya y por ello, hay más técnicas y tecnologías.

Pero quizás la parte más diferenciable de ambos textos está en que el libro de Marea Verde, a través de diagramas de árbol y de combinatoria, realiza la explicación del cálculo de las probabilidades de una distribución binomial y el libro de Anaya aplica directamente la fórmula para el cálculo de probabilidades de la distribución binomial. Y otra diferencia a destacar es que para calcular las permutaciones, variaciones y combinaciones, el libro de Marea Verde las realiza con el diagrama de árbol para aplicar la fórmula correspondiente.

Por lo tanto, las técnicas utilizadas son:

T1. Técnicas de Combinatoria.

T2. Aplicación de la Regla de Laplace.

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad.

T5. Representar mediante diagrama de barras.

T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza.

T7. Aplicación de las fórmulas de la distribución binomial.

Y las tecnologías utilizadas son:

TE1. Regla de Laplace.

TE2. Teorema de la Probabilidad Total.

TE3. Teorema de Bayes.

TE4. Definición de Proporcionalidad.

TE5. Representación gráfica de valores.

TE6. Definición de Combinatoria.

B.3. Qué efectos produce dicha enseñanza en el aprendizaje del alumnado

A lo largo de los años, son varios los textos que han intentado analizar el estudio de la probabilidad entre el alumnado de Bachillerato. Uno de los primeros que aparece en las búsquedas de internet, en su parte de conclusiones realiza cuatro afirmaciones muy concretas:

> La simulación parece una de las mejores formas de desarrollar una imprescindible base intuitiva; la secuencia de dígitos aleatorios es de fácil y rápida utilización, permitiendo afrontar problemas "difíciles" el concepto de "lo aleatorio" es de fácil asimilación; las nociones de frecuencia y probabilidad de un suceso aleatorio pueden ser adquiridos fácilmente, sentando bases para posteriores cálculos más rigurosos. (Fernández, 1990, p.229)

Los textos de los libros expuestos, en mi opinión, intentan cumplir las premisas que mencionaban Serrano, Batanero y Ortiz (1996) que para el estudio de la probabilidad se deben "explorar mediante situaciones y de forma activa, los modelos de probabilidad. A través de la experimentación y la simulación, los estudiantes deben formular hipótesis, comprobar conjeturas y depurar sus teorías sobre la base de la nueva información."

Landín (2013) indica que la base del conocimiento en los problemas binomiales son la regla del producto de probabilidades y las combinaciones, que a través del diagrama de árbol hace viable la adquisición de esos conceptos, ya que permite comprender la regla del producto y permite contar y controlar el número de secuencias de tamaño n de un determinado número de éxitos y fracasos. El siguiente paso es comprender y usar las combinaciones y la regla del producto que cuando no se apoyan en el diagrama de árbol significa que la han comprendido. Finaliza diciendo que "el nivel de razonamiento que abarca esta comprensión es logrado por pocos estudiantes."

C. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNADO

C.1. Conocimientos previos que necesita el alumnado para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Para afrontar los campos de problemas que se van a realizar con respecto al objeto matemático elegido (Cálculo de Probabilidades de distribución de probabilidad discreta: distribución binomial), se debe tener en cuenta también qué es lo que se ha estudiado previamente.

La importancia de la adquisición de los conocimientos mínimos necesarios para estudiar adecuadamente la distribución binomial, se hace de vital importancia en este aspecto, ya que, el saber relacionar lo aprendido con lo que se va a aprender es imprescindible para una mejor adquisición de los conocimientos necesarios.

A lo largo de la vida académica del estudiante, se va tratando poco a poco la probabilidad en cada uno de los cursos. En apartados anteriores se ha explicado que, como por ejemplo, lo que en un principio, con las primeras leyes educativas, se tenía en un segundo plano y que muchas veces no se llegaba ni a estudiar en clase, se empieza a tratar de una forma adecuada y con contenido en los distintos cursos.

Batanero, Serrano y Green (1998), explican por qué es fundamental el estudio de la probabilidad, ya que se requiere desarrollar una comprensión profunda de él para progresar en el campo del cálculo de probabilidades. En particular, la técnica de pedir a los estudiantes que discriminen secuencias aleatorias y no aleatorias para apreciar sus propiedades ha sido propuesta por estos autores.

Además, introducen una apreciación que ha sido comentada anteriormente, en la que señalan que en Bachillerato se suelen incluir los conceptos de variable aleatoria y distribución, en concreto la distribución binomial, aunque reconoce en la parte final que con respecto a la investigación didáctica, son escasos los trabajos que existen (Batanero, Serrano y Green, 1998).

Es por ello, que en este trabajo, se incluyen de alguna manera todos ellos, para intentar tener una buena visión del objeto a estudio.

Tomando como referencia la última ley educativa vigente en la actualidad (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, que modifica Modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación), el estudio de las distribuciones Binomial y Normal exige conocer anteriormente qué es una variable aleatoria, qué tipos de variables hay y qué parámetros estadísticos las caracterizan. Los alumnos de la modalidad de Ciencias y Tecnología se encontrarán en esta asignatura por primera vez con ellos y los de Ciencias Sociales lo habrán dado en el curso anterior en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. I.

Martínez y Marí (2010) indican que en la búsqueda realizada no se ha podido encontrar casi nada sobre el significado de una distribución binomial, aunque sí se destaca en los libros que analizan, que se parte desde una distribución de Bernoulli, introduciendo de esta forma, como variable dicotómica para pasar seguidamente a la distribución binomial, añadiendo, además algunos de los conocimientos previos necesarios para poder interpretar una distribución binomial, como son los diagramas de barras.

Además, es necesario conocer la combinatoria, el tamaño muestral, el tamaño poblacional, la media, la varianza, los conceptos de probabilidad y variable aleatoria, qué es un suceso y un suceso contrario, y por supuesto el significado de variable discreta y variable continua, como se ha indicado anteriormente.

C.2. ¿La enseñanza propicia que el alumnado adquiera los conocimientos previos?

Como se puede ver en el artículo de Batanero, Tauber y Sánchez (2001) "la escasez de tiempo disponible y de los conocimientos previos que tienen los estudiantes, impide llevar a cabo un estudio completo de la probabilidad." Más adelante, en el mismo artículo se mencionan los errores que se cometen por no saber diferenciar entre lo discreto y lo continuo, lo que se puede deducir puede implicar problemas a la hora de aplicar las probabilidades y sobre todo en su interpretación y comprensión.

Haciendo un repaso a los currículos actuales de secundaria y bachillerato al respecto de la enseñanza de los conocimientos previos que se indican en los párrafos anteriores, en base a la Orden ECD/489/2016 y Orden ECD/494/2016 de 26 de mayo, donde se aprueban los currículos de secundaria y bachillerato, enumeramos todos los que aparecen en los mismos:

1º ESO

Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.

Medidas de tendencia central.

Fenómenos deterministas y aleatorios.

Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.

Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

2º ESO

Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.

Medidas de tendencia central.

Medidas de dispersión.

Fenómenos deterministas y aleatorios.

Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.

Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.

Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.

Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

3º ESO (ACADÉMICAS)

Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas.

Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.

Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número.

Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

3º ESO (APLICADAS)

Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas.

4º ESO (ACADÉMICAS)

Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.

Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.

Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.

Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.

Probabilidad condicionada.

4º ESO (APLICADAS)

Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.

Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.

Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagramas de árbol.

Todos los contenidos expuestos en las líneas anteriores son suficientes para poder afrontar el aprendizaje de las distribuciones de variables discretas sin ningún problema, aunque como se ha mencionado anteriormente, según Batanero, Tauber y Sánchez (2001) "la escasez de tiempo disponible y de los conocimientos previos que tienen los estudiantes, impide llevar a cabo un estudio completo de la probabilidad."

C.3. Actividades para asegurar que el alumnado posee esos conocimientos previos

Antes de comenzar el desarrollo de las distribuciones binomiales, es necesario asegurarse de que el alumnado tiene los conocimientos mínimos que van a permitirle entender las cuestiones y la terminología que se utilizará en el proceso de la enseñanza.

En el aparatado anterior se han indicado cuáles son los conocimientos mínimos que se deben estudiar en los cursos anteriores de secundaria, por lo que es interesante hacer un repaso a esos contenidos para que aquello que se haya olvidado o que no se haya estudiado, se pueda adquirir. En este aspecto es importante repasar y trabajar todos ellos, por lo que se proponen realizar una serie de actividades basadas en las siguientes premisas:

- Explicación y repaso de los contenidos mínimos, de una forma práctica, estando siempre relacionados con temas cotidianos, que permite una mejor comprensión por parte del alumnado.

- Interpretación y comprensión de los resultados, es decir, conocer qué es lo que ha salido y cómo afecta o se aplica a la vida cotidiana.

Es importante entender y comprender de forma clara la regla del producto y la combinatoria, por lo que los ejercicios y tareas que se proponen, van a ir encaminadas a afianzar estos conocimientos. Se podría comenzar realizando una prueba de evaluación, para poder conocer el nivel, pero eso indicaría los distintos niveles de conocimiento dentro del mismo aula, por lo que es mejor, en mi opinión, que se realicen actividades que afiancen los contenidos a todo el grupo.

Es por ello, que es necesario y primordial hacer un repaso general a los contenidos mínimos que se necesitan para comprender una distribución de probabilidad. Con esto se pretende indicar que es necesario hacer un repaso a la combinatoria (combinaciones), a la regla de Laplace, distribución de frecuencias, distribución de probabilidad y a la representación en diagramas de barras.

Por ello, las dos primeras sesiones deberán centrarse en la práctica de los contenidos enumerados en el párrafo anterior, así como en la comprensión de la terminología probabilística (suceso, experimento,…) y estadística (muestra, frecuencias,…). Todo debe ser práctico, ágil y de fácil comprensión, para que el alumnado pueda interactuar en el aula.

Las actividades que se plantean para asegurar los conocimientos previos, tal y como se ha visto anteriormente han sido seleccionadas o están basadas en el libro de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º de Bachillerato texto de Marea Verde utilizado en la realización de este trabajo, y son las siguientes:

Actividad 1

La probabilidad de que un incendio haya sido provocado es de 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que si ha habido 3 incendios, los 3 hayan sido intencionados? ¿Y solo uno?

Actividad 2

En una fábrica de muñecas la probabilidad de desechar alguna de ellas es, normalmente un 0.3 de su producción, por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas.
b) Al coger dos muñecas al azar hay que desechar solo una.
c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna.
d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Actividad 3

En una fiesta actúan 3 grupos musicales. ¿De cuántas formas posibles se pueden ordenar su actuación?

Actividad 4

Si tenemos el 0 y el 1 como símbolos ¿de cuántas formas distintas se pueden realizar tiras de 4 símbolos?

Actividad 5

Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos: presidencia, secretaría y tesorería. Si únicamente se presentan 4 personas ¿de cuántas maneras puede estar formada la junta?

Actividad 6

En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacerse?

Actividad 7

Calcula: $\binom{7}{1}, \binom{5}{3}, \binom{7}{7}, \binom{9}{6}$

En la realización de las actividades propuestas, se espera que haya confusión a la hora de identificar las permutaciones, variaciones o combinaciones, en lo que se refiere a la parte de la combinatoria. En la parte en la que se deben resolver las actividades con diagramas de árbol, se espera que los errores sean a la hora de calcular las probabilidades cuando se deben utilizar varias ramas o varias fases. La resolución de todas ellas se encuentra en el Anexo I.

D. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

D.1. Razón o razones de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

Martínez y Marí (2010) centran la explicación del por qué debe estudiarse la distribución binomial desde el punto de vista empresarial, ya que, es esta distribución la que mide el número de éxitos. Las empresas tienen situaciones en las que se espera que ocurra algún evento o no y el resultado solamente puede ser éxito o fracaso. Comentan el ejemplo de la producción de una pieza, y que ésta puede salir buena o defectuosa.

Uno de los objetivos que ambos autores se marcan es el de "Utilizar la distribución binomial para obtener las probabilidades de aquellas situaciones empresariales cuyos posibles resultados, sean únicamente dos resultados".

En el documento realizado por SERGAS (2014), aparece una relación de la distribución binomial con la bioestadística, muy utilizada en el campo de la medicina, mencionando algunos ejemplos:

> La distribución binomial es una distribución discreta muy importante que surge en muchas aplicaciones bioestadísticas. (…) Ejemplos de respuesta binaria pueden ser el hábito de fumar (sí/no), si un paciente hospitalizado desarrolla o no una infección, o si un artículo de un lote es o no defectuoso. (…) Este modelo se aplica a poblaciones finitas de las que se toman elementos al azar con reemplazo, y también a poblaciones conceptualmente infinitas, como por ejemplo las piezas que produce una máquina, siempre que el proceso de producción sea estable (la proporción de piezas defectuosas se mantiene constante a largo plazo) y sin memoria (el resultado de cada pieza no depende de las anteriores). Un ejemplo de variable binomial puede ser el número de pacientes con cáncer de pulmón ingresados en una unidad hospitalaria. (SERGAS, 2014, p.6)

La importancia del uso de la distribución binomial en el ámbito empresarial, y teniendo en cuenta que el currículo del Bachillerato de Ciencias Sociales, se enfoca hacia la rama empresarial, por lo que la razón de ser que se va a tener en cuenta va a ser la aplicación en el ámbito empresarial. Es necesario reconocer, en mi opinión, que el ámbito empresarial puede expresar la realidad de la vida cotidiana, ya que, la investigación en sus distintos sectores, están centradas en mejorar la vida de las personas, además del beneficio empresarial.

D.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Martínez y Marí (2010) realizan un pequeño repaso de los inicios de la distribución binomial, donde indican que fue desarrollada por Jakob Bernoulli (Suiza,1654-1705) y que es la principal distribución de probabilidad discreta para variables dicotómicas. Bernoulli definió el proceso conocido por su nombre. Dicho proceso, consiste en realizar un experimento aleatorio una sola vez y observar si cierto suceso ocurre o no, siendo p la probabilidad de que ocurra (éxito) y q=1-p de que no ocurra (fracaso) , por lo que la variable sólo puede tomar dos posibles valores, el 1 si ocurre y el 0 sino sucede. La distribución binomial es una generalización de la distribución de Bernoulli, cuando en lugar de realizar el experimento aleatorio una sola vez, se realiza n, siendo cada ensayo independiente del anterior.

Es decir, la característica principal de la distribución binomial es que es la repetición del proceso de Bernoulli n veces. Con esta distribución lo que se pretende es poder averiguar las probabilidades de éxito que se tienen en un experimento. El proceso de Bernoulli se queda corto cuando queremos saber las probabilidades al repetirse el experimento n veces, algo que es habitual en la realidad.

Como se puede observar, la razón de ser histórica de la distribución binomial sigue siendo la misma que actualmente: poder conocer la probabilidad de éxito de un experimento que se repite n veces. Bernoulli aplicaba a sus experimentos el arte de conjeturar a los asuntos de la vida práctica.

D.3. Diseño de problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

En los dos cuadros que se muestran bajo estas líneas, aparecen dos modelos de problemas que puede servir para constituir la razón de ser del objeto matemático: poder calcular la probabilidad de que ocurra un éxito, enmarcado en la realidad actual.

1. Se está preparando la iluminación del evento de presentación de un nuevo producto que está relacionado con el corazón, y con ello se quiere que a primera vista se perciba una sensación de calidez. La organizadora del evento indica que se consigue con una luz roja. Disponemos para ello de 3 bombillas rojas, 3 blancas y 2 negras. Si se eligen 4 bombillas al azar. Calcula la probabilidad de que 3 sean rojas.

2. En un estudio de la población sabemos que 7 de cada 10 personas escogen el transporte público para ir a trabajar. Si vamos a una empresa con 100 trabajadores,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 75 trabajadores que cojan el transporte público?

b. ¿Y ninguno?

c. Halla los parámetros μ(media) y σ^2(varianza).

Del anterior problema se pueden presentar numerosas variaciones y, por tanto, también numerosas complejidades, aunque para el inicio del estudio de las distribuciones de probabilidades de variables discretas de 1º de Bachillerato donde se empieza a tener contacto con la distribución binomial, se cree que es suficiente para adquirir los conocimientos básicos para su reconocimiento y su interpretación.

D.4. Metodología a seguir en la implementación en el aula

Para poder implementar este punto en el aula, sería necesario conocer el desarrollo epistemológico del objeto. Es por ello, que en este aspecto es necesario tener una información clara y concisa sobre el mismo. También, es necesario hacer ver la importancia de aprender esta distribución y su relación con la realidad.

Es por ello, que se dividirá la clase en grupos de 3 o 4 personas, y a cada uno de se les entregará una hoja con el enunciado del problema para que lo resuelva y plantee la resolución al resto de la clase.

La resolución deberá plantearse a través de los mecanismos vistos en clase, es decir, no será posible entregar la resolución aplicando directamente la fórmula del cálculo de probabilidades de la distribución binomial, sino que deberá expresarse la resolución a través de distintas opciones, utilizando la combinatoria o los diagramas de árbol, vistos en clase.

E. CAMPOS DE PROBLEMAS

E.1. Tipos de problemas que se presentan en el aula

<u>CP1: Aplicación de la combinatoria al cálculo de Probabilidades.</u>

1. ¿Sabes jugar al póker? Se reparten 5 cartas y puede haber distintas jugadas: parejas, dobles parejas, póker,.. Calcula la probabilidad de obtener un póker de ases servido. NOTA: Póker de ases servido es que en el reparto de las 5 cartas, 4 de ellas sean iguales: 4 ases, 4 doses…

CP2: Obtener la distribución estadística y la distribución de probabilidad de una variable y los parámetros μ y σ.

2. Tenemos un dado legal en el que las puntuaciones que se pueden obtener son del 1 al 6 ($\boldsymbol{X_i}$) Lanzamos 100 veces un dado obteniendo las siguientes frecuencias, es decir las veces que ha ocurrido $\boldsymbol{X_i}$ ($\boldsymbol{f_i}$):

$\boldsymbol{X_i}$	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{f_i}$	19	16	15	21	17	12

Calcula:

a) La distribución de frecuencias absolutas. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

b) La distribución de frecuencias relativas. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

c) La distribución de probabilidad. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

3. Se lanza una moneda trucada 3 veces. Llamamos éxito a que salga cara. Escribe la distribución de probabilidad sabiendo que la probabilidad de sacar cara es de 0,6 (Caro, 2015, p.330).

CP3: Obtener la probabilidad de éxito de la distribución, es decir, calcular las probabilidades de una distribución binomial.

4. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es :

Sexo del recién nacido	Chica	Chico
Probabilidad	0,485	0,515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés ¿cuál es la probabilidad de que nazcan 7 chicas?

5. En un estudio de la población sabemos que 7 de cada 10 personas usa desodorante diariamente. Si vamos a una empresa con 100 trabajadores,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 75 trabajadores que usen desodorante?

b. ¿Y ninguno?

c. Halla los parámetros μ (media) y σ^2 (varianza).

La resolución y explicación de estos ejercicios se encuentra en el Anexo III.

E.2.Modificaciones en la técnica inicial que se exigen en la resolución de los problemas.

Las técnicas indicadas en el apartado B.2, son las que se citan a continuación:

T1. Técnicas de Combinatoria.

T2. Aplicación de la Regla de Laplace.

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad.

T5. Representar mediante diagrama de barras.

T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza.

T7. Aplicación de las fórmulas de la distribución binomial.

Con respecto a las técnicas que aparecen en los libros de texto, en la resolución de los problemas que aparecen en el Anexo III de este trabajo, se utilizan todas las anteriores y no hay ninguna variación con respecto a las que se han ido numerando.

Por lo tanto, a la hora de enseñar las distribuciones binomiales, se aplicarán las técnicas que se han ido mencionando a lo largo de todo el trabajo.

E.3.Metodología a seguir en la implementación en el aula

El trabajo a realizar en el aula para la implementación de estas técnicas, debe estar basado en trabajos tanto grupales como individuales. Con los grupales se pretende que el trabajo sea más amplio y que se puedan detectar disparidad de opiniones en una misma resolución y en los individuales, el objetivo es profundizar en los conocimientos y asimilar los conceptos aprendidos.

Es por ello, que los trabajos grupales van a ser siempre mucho más prácticos y con más relación con la vida real que los trabajos individuales.

CP1: Aplicación de la combinatoria del cálculo de Probabilidades.

La combinatoria es una parte que se ha estudiado en otros cursos y se ha repasado en este mismo, por lo que el planteamiento de estos campos de problemas va a ser un ejercicio práctico en el que se trabajen la combinatoria y el cálculo de probabilidades.

Se dividirá la clase en grupos de 4 personas, que deberán resolver ejercicios similares al indicado en el apartado E1. Los enunciados de los mismos serán siempre de temas relacionados con la vida cotidiana, para que suponga un mejor entendimiento de su cálculo.

CP2: Obtener la distribución estadística y la distribución de probabilidad de una variable y los parámetros μ y σ.

A la hora de trabajar sobre las distribuciones, hay que dejar claro los conceptos de distribución de frecuencias (absolutas y relativas) y de distribución de probabilidad.

Es por ello, que el trabajo en esta parte va a ser individual, para permitir adquirir los conceptos indicados y habilidades en el manejo de fórmulas y conceptos.

Se trabajarán a lo largo de varias sesiones, problemas como los indicados en este apartado y que permitan diferenciar unas distribuciones de otras.

Los enunciados de estos problemas serán como en el campo de problemas anterior basados en la vida real, para que suponga un mejor entendimiento. Una vez realizados estos problemas de forma individual, se expondrán en clase y se discutirá su resultado.

CP3: Obtener la probabilidad de éxito de la distribución, es decir, calcular las probabilidades de una distribución binomial.

En esta parte se hará un trabajo grupal, en el que se dividirá la clase en grupos de 4-5 personas. Este trabajo consistirá en realizar, además, un trabajo de campo. Por ello, cada grupo debe elegir un tema que le interese y que sea una distribución binomial, por ejemplo "alumnado que lleva reloj". Tras elegir el tema, cada grupo deberá realizar el trabajo de campo, recogiendo las respuestas de 50 alumnos del Instituto. Una vez obtenidas, deberán calcular los parámetros y calcular varias probabilidades.

Realizar el trabajo desde el inicio (recogida de datos) hasta el final, puede ser un gran incentivo para comprender las distribuciones binomiales y conocer, aplicar e interpretar todos los datos que se vayan obteniendo.

Cada grupo planteará su problema, y una vez aprobado por el profesorado, se guiará en el desarrollo del mismo.

Además, para completar este campo de problemas, se practicará con la resolución de los ejercicios que se han planteado para su realización en este trabajo.

F. LAS TÉCNICAS

F.1. Tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

T1. Combinatoria y T2. Aplicación de la Regla de Laplace.

1. Se quiere jugar a la quiniela de fútbol. Para ello sabemos que hay tres posibilidades de respuesta: 1 si gana el equipo local, X si empatan los dos equipos y 2 si gana el equipo visitante. Además, el máximo de partidos que aparece en la quiniela son 14. Queremos averiguar cuál es la probabilidad de acertar una quiniela de 14. (Miranda, 2015, p.306).

2. Se está disputando el campeonato del Bajo Gállego de petanca entre los equipos de las localidades de San Mateo, Villanueva y Zuera. ¿Cuál es la probabilidad de que Villanueva quede segunda?

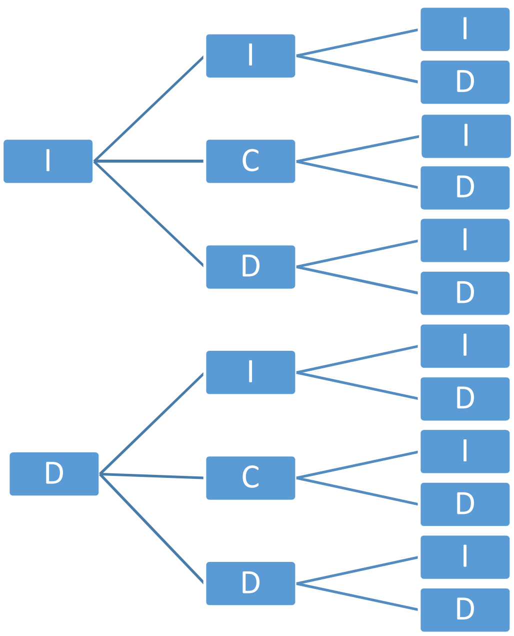
Para el cálculo de probabilidades aplicando combinatoria, es necesario aplicar estas dos técnicas, en la que los casos posibles se corresponden con una variación, permutación o combinación para poder calcular la probabilidad.

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

3. Se está celebrando el concurso de talentos de hip hop de la ciudad de Zaragoza en la que en la fase final se encuentran cuatro grupos: Rasmia, Lokura, Adelante y Zarahop. ¿Cuál es la probabilidad de que Lokura actúe en último lugar siendo el sorteo al azar?

4. En una competición en la que se debe encontrar la salida de un bosque eligiendo correctamente los caminos que se deben elegir. Presentando el siguiente "mapa" del bosque si elegimos un camino al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el que resulte de elegir siempre el camino de la izquierda?

BIF. 1 *BIF. 2* *BIF. 3*



T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias absolutas, relativas y de probabilidad; T5. Representar mediante diagrama de barras; T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza.

5. Se lanzan dos monedas y se cuentan el número de caras, obtenido la siguiente distribución de probabilidad

$\boldsymbol{X_i}$	0	1	2
$\boldsymbol{p_i}$	0,25	0,5	0,25

Calcula media y desviación típica de la distribución de probabilidad. (Caro, R. (2015)).

6. Se realiza un estudio en una localidad a 100 familias, para conocer el número de hijos (X_i) que tienen las familias. El resultado de la toma de datos es el siguiente:

$\boldsymbol{X_i}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{f_i}$	15	25	30	22	5	3

a) Halla la media y la varianza de esta distribución y dibuja su diagrama de barras.

b) Si sabemos que las probabilidades de tener hijos están en la siguiente tabla, halla la media y la varianza de la distribución de probabilidad.

$\boldsymbol{X_i}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{p_i}$	0,2	0,2	0,35	0,2	0,10	0,05

T7. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial.

7. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya ese número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

(Colera, Oliveira, Colera y Santaella (2015).)

8. En el estudio de una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que las curaciones completas alcanzan el 80% de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

F.2. Técnicas o modificaciones de la técnica que se ejercitan en ellos

Las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas son las mismas que las planteadas en el aparatado B2, del mismo modo que se ha mencionado en el apartado E2. Su resolución puede verse en el Anexo IV de este trabajo.

F.3. ¿Las técnicas están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Para visualizar de una forma directa y rápida que permita responder a la pregunta que se plantea en este apartado, se realiza una tabla en la que se indican qué técnicas se utilizan en la realización de los campos de problemas que se han descrito, ambos, en puntos anteriores:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
CP1	X	X				X	
CP2				X	X	X	
CP3	X		X			X	X

Por lo tanto, la relación entre campos de problemas y técnicas queda de la siguiente manera:

<u>CP1: Aplicación de la combinatoria del cálculo de Probabilidades.</u>

T1. Técnicas de combinatoria.

T2. Aplicación de la regla de Laplace.

T6. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial.

<u>CP2: Obtener la distribución estadística y la distribución de probabilidad de una variable y los parámetros μ y σ.</u>

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias absolutas, relativas y de probabilidad.

T5. Representar mediante diagrama de barras.

T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza.

T7. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial.

<u>CP3: Obtener la probabilidad de éxito de la distribución, es decir, calcular las probabilidades de una distribución binomial.</u>

T1. Técnicas de combinatoria.

T3. Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol.

T6. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial.

F. 4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Las técnicas se irán introduciendo en el aula, conforme se vaya explicando y avanzando en la concepción de la distribución binomial. Sí es cierto que el orden de aparición en el aula será similar a la numeración que se les ha otorgado como tarea, por lo que de esta forma, se sigue una secuencia lógica de aplicación.

Tal y como se han planteado los problemas, es importante dejar que el alumnado pueda pensar y razonar para alcanzar el resultado del ejercicio. Es en ese momento, una vez que haya pensado o propuesto una solución, cuando se deben ir introduciendo las diferentes técnicas expuestas en el punto anterior.

Tal y como se explica la implementación en el aula de los problemas de campos de problemas, se realizarán trabajos grupales e individuales, planteándose los mismos objetivos: trabajo amplio y que surjan disparidad de opiniones en el trabajo grupal y profundizar en los conocimientos y asimilar conceptos en el trabajo individual.

G. TECNOLOGÍAS (justificación de las técnicas)

G.1. Razonamientos para justificar las técnicas.

Para la tarea de combinaciones de elementos, se llega a través de dividir las variaciones de los elementos entre las permutaciones. Para poder llegar a esta conclusión, se puede realizar a través del diagrama de árbol (variaciones y permutaciones), es decir, si calculamos las variaciones de los elementos que tenemos, en los que el orden no importa, nos sale una lista completa de las distintas posibilidades que podemos obtener. Si comprobamos todas ellas se repiten un número fijo de veces cada una, que eso serían las permutaciones. Por lo tanto, para saber la combinación de estos elementos bastaría con dividir las variaciones entre las permutaciones.

La regla de Laplace (T2) se deduce de las propiedades de la probabilidad (vista en temas anteriores) en el caso de que todos los sucesos sean equiprobables.

Los diagramas de árbol (T3) son la representación gráfica de las probabilidades de un espacio muestral completo, en los que cada rama lo forman, es decir, sus probabilidades suman 1 y las relaciones que existen entre cada rama. Las propiedades de la probabilidad hacen que se calculen las probabilidades.

La representación gráfica de los datos de la variable discreta son los Diagramas de barra (T5), que representan el dato y la frecuencia o proporción que alcanza en el conjunto total de los datos. Los datos son recogidos en las tablas de frecuencias o de probabilidad (T4) tanto si son recogidos en un experimento propio o son facilitados para la resolución de un problema.

Las fórmulas de la media y de la varianza (T6) se deducen de la aplicación de la definición de ambos parámetros: la media es el promedio de los valores y la varianza es la diferencia que hay entre los datos y su media entre el número de observaciones.

Las fórmulas que se aplican en la distribución binomial (T7) son resultado de aplicar el cálculo de probabilidades a través del diagrama de árbol, y que está compuesta por la probabilidad de éxito y la de fracaso y la combinación de los elementos que tenemos.

Para la media y la varianza de la distribución binomial, mediante el cálculo de la media para las distribuciones de probabilidad, se deduce la fórmula de ambos parámetros.

G.2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas (profesorado, alumnado, nadie)?

Generalmente, se justifican las técnicas a la hora de resolver un problema, ya que, es necesario utilizarlas para llegar a una solución. Normalmente, en una clase, suele ser el profesorado quien presente las técnicas del objeto que se está estudiando para que el alumnado, posteriormente, pueda resolver los problemas.

Una vez que se son presentadas por el profesorado, es él mismo quien, si es necesario, realice la justificación de uso.

G.3. Diseño del proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

En el problema primero planteado en la razón de ser, se van a introducir los conceptos de Combinatoria (T1) y Regla de Laplace (T2) y se presentarán sobre la propia actividad planteada. En ese punto, además, la justificación de la Regla de Laplace (T2), a la hora de calcular probabilidades, se realizará a través de la presentación de sucesos equiprobables, que se utilizará en la resolución del problema.

Los diagramas de árbol (T3) se tratarán desde el inicio, como ya se ha explicado en apartados anteriores, y se intentará que se utilicen para resolver los distintos problemas planteados del cálculo de probabilidades, siempre que sea posible utilizarlo.

En el segundo problema de razón de ser, se presentará la aplicación del cálculo de probabilidades de la distribución binomial (T7), que se introducirá mostrando el cálculo de la media y la varianza de una distribución (T6). Se añadirá la representación gráfica del mismo a través de diagramas de barra (T5) una vez que se plantean los datos en unas tablas de distribución de frecuencias (T4).

G.4. Metodología para la implementación en el aula

Antes de iniciar la explicación de cualquier técnica, se plantearán los problemas indicados en razón de ser del objeto matemático, dejando que el alumnado pueda llegar a alguna conclusión para su resolución.

En este caso, será necesario el trabajo primero individual, para que cada uno pueda proponer alguna opción en la resolución del mismo y posteriormente se reunirán en grupos de 3-4 personas, para poner en común las propuestas que han realizado individualmente, con el objetivo de que cada grupo exponga una propuesta de resolución concreta.

Como se dice en el párrafo anterior, cada grupo realizará una propuesta de resolución, que con toda seguridad será variada, por lo que puede dar pie para realizar un debate en la clase. Una vez que se intenta llegar a una misma conclusión, se realizará la presentación de las técnicas para resolver el problema y cómo se llega a la solución.

Las propuestas se realizarán de forma simultánea, es decir, los grupos de la clase de dividirán para que la mitad resuelva uno de los problemas y la otra mitad el otro, para no ocupar mucho tiempo en la resolución. Lo ideal sería que todos trabajaran todos los problemas, pero esta puede ser una muy buena alternativa para no dejar nada por realizar.

H. SECUENCIA DIDÁCTICA Y CRONOGRAMA

H.1. Secuenciación de las actividades propuestas en apartados anteriores.

- Sesión 1: Repaso inicial. Ejercicios propuestos de repaso en C.
- Sesión 2: Ejercicios de razón de ser. Ejercicios propuestos en D.
- Sesión 3: Combinatoria (T1) y Aplicación Regla de Laplace (T2). Ejercicios donde se trabajan estas dos técnicas por separado y luego conjuntamente.
- Sesión 4 Elaboración, interpretación y resolución de probabilidades mediante diagramas de árbol (T3). Ejercicios Propuestos en F.
- Sesión 5. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad (T4), representar mediante diagrama de barras (T5) y aplicación de las fórmulas de media y varianza (T6). Ejercicios propuestos en F.
- Sesión 6. Desarrollo de las fórmulas de la distribución binomial (T7). Ejercicios propuestos en F.

H.2. Duración temporal aproximada

La duración temporal propuesta, se muestra en la siguiente tabla, en la que cada día se corresponde con una clase.

	DÍA 1	**DÍA 2**	**DÍA 3**	**DÍA 4**	**DÍA 5**	**DÍA 6**	**DÍA 7**	**DÍA 8**	**DÍA 9**
Sesión 1									
Sesión 2									
Sesión 3									
Sesión 4									
Sesión 5									
Sesión 6									

I. EVALUACIÓN

I.1. Prueba escrita (duración aproximada de una hora) qué evalúa el aprendizaje realizado por el alumnado.

Problema 1:

Elisa es jugadora del equipo de fútbol de su localidad y este fin de semana tiene el partido más importante de la temporada, la final de la Copa en la que se enfrentan a uno de los mejores equipos que ha habido este año. Elisa tiene miedo a que se decida en la tanda de penaltis, ya que sabe, que es jugársela a la suerte (según ella). De las 11 jugadoras que tiene el equipo en campo, hay 4 que son las mejores lanzadoras. Calcula la probabilidad de que si se escoge al azar el equipo de tiradoras en la primera tanda de penaltis, estén las 4 mejores. NOTA: Primera tanda de penaltis son 5 tiros.

Problema 2:

Desde la asociación de estudiantes se ha decidido realizar un sorteo entre los estudiantes de la clase de 1º de Bachillerato, de un regalo que ha sido entregado por el AMPA. Para ello, se decide realizar un sorteo de una forma original, por lo que se introducen en una bolsa puntos del 1 al 4, el número de veces que aparece en la tabla siguiente:

X_i	1	2	3	4
f_i	4	3	2	1

El premio se lo lleva quien más puntos consiga. Con todo esto, calcula:

a) La distribución de probabilidad.

b) Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica).

c) Dibuja su diagrama de barras.

d) ¿Cuál crees que será la puntuación que más salga?

Problema 3:

Según un estudio realizado por estudiantes, la probabilidad de tener un teléfono móvil a la edad de 10 años es de 70%. En una clase de 20 alumnos de esa edad ¿Cuál es la probabilidad de que tengan teléfono móvil 15?

Problema 4:

Se ha comprado un paquete 25 mascarillas en el supermercado, elaborados por una fábrica que ha comprobado que el 95% de las que produce no tienen ningún defecto. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa? Calcula media y desviación típica.

I.2. ¿Qué aspectos del conocimiento del alumnado sobre el objeto matemático se pretenden evaluar con cada una de las respuestas de la prueba?

En cada problema se evalúan los siguientes campos de problemas indicados en el punto A de este trabajo y que se concretan de la siguiente manera:

Problema 1: Aplicación de la combinatoria en el cálculo de probabilidades.

Problema 2: Distribuciones de probabilidad y el cálculo de media y varianza.

Problema 3: Cálculo de probabilidades en una distribución binomial.

Problema 4: Cálculo de probabilidades en una distribución binomial y el cálculo de sus parámetros.

Los problemas, tal y como se han podido leer en el apartado anterior, pretenden mostrar la aplicación de las probabilidades a la realidad en la que nos encontramos, para intentar, de esta forma, una mejor comprensión del objeto matemático.

I.3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento del alumnado?

Problema 1: En este problema se pretende que el alumnado identifique claramente el cálculo de la probabilidad a través de la aplicación de la fórmula de Laplace en el cálculo de probabilidades.

Quizás, la complicación puede estar en la aplicación de la combinatoria para identificar los casos favorables o cómo saber los casos posibles que se pueden encontrar.

Problema 2: En las sesiones en las que se ha estructurado el aprendizaje del objeto matemático, se analizan las distribuciones de frecuencias absolutas y relativas, además de la distribución de probabilidad, con el único objetico de conceder habilidades al alumnado que le permitan diferenciar unas de otras.

En este problema solamente se solicita el cálculo de la distribución de probabilidad, porque es en realidad la que interesa identificar y calcular para entender la distribución binomial. Es por ello, que no se pretende que se calcule ninguna otra distribución y solamente sea la que se solicita.

Problema 3: En este primer problema de distribución binomial se pretende que se calcule la probabilidad según los datos que se presentan en el mismo. Identificar qué es cada dato y aplicar la fórmula del cálculo de probabilidades es el objetivo.

Problema 4: Este es el segundo problema que se plantea en el cálculo de probabilidades de la distribución binomial y se pretende que además de calcular una probabilidad un tanto liosa (puede suponer un error al alumno si no lee bien el enunciado), se calculen la media y la desviación típica a través de las fórmulas de los parámetros de la distribución binomial. Es importante para la realización del ejercicio el identificar cada uno de los valores que se dan para resolver el problema.

I.4. Criterios de calificación

Para establecer los criterios de calificación en cada uno de los problemas, se debe tener en cuenta el valor que a cada cuestión se le da. Es por eso que en la tabla que se indica a continuación, se indica el porcentaje del valor de la pregunta calificada, que se le asigna por cada una de las cuestiones:

Qué se califica	**Valor**
Planteamiento del problema	20%
Conocimiento y aplicación de las técnicas	70%
Solución correcta	5%
Redondeo a la segunda cifra decimal	5%

Como se puede observar, se da más peso al planteamiento del problema y al conocimiento y aplicación de las técnicas que a obtener la solución correcta (se puede cometer un error de cálculo final) o al redondeo en la segunda cifra (se debe realizar bien y es como se ha explicado en clase, pero no tiene mucho peso en la calificación final).

En el caso del planteamiento del problema, en probabilidad y estadística es muy importante saber identificar los datos que se nos dan y qué es cada cosa, por lo que es importante que el alumno aprenda a plantear los problemas que le beneficiarán en el futuro, además de leer detenidamente el enunciado y comprender lo que se pide, por eso se la da tanto peso a este apartado.

Por último el conocimiento y aplicación de las técnicas es el elemento imprescindible a la hora de resolver el problema que se está resolviendo, por lo que es el mayor peso de la calificación total.

J. REFERENCIAS

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (*1*), 113-123.

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2001) Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Quadrante*, 10*(1*), 59-92.

Caro, R. (2015). Capítulo 8: Distribuciones de Probabilidad. En D. Miranda (Ed.). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I: 1º Bachillerato* (pp. 327-352). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Sociales%20I.pdf.

Cid Chandía, N., Retamal Pérez, L. y Alvarado Martínez, H. *Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática.* Universidad Católica de la Santísima Concepción. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/cid-retamal.pdf.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M.J., Colera Cañas, R., y Santaella Fernández, E. (2015). Distribuciones de probabilidad de variable discreta. En V. Vallejo. (Ed.). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1. Bachillerato* (pp.236-257). Madrid, España: Editorial Anaya.

Fernández, S. (1990). Secuencias y simulaciones aleatorias. *Estadística española,* 32 (*123)*, 224-231.

Landín P.R. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales. Probabilidad condicionada. *Revista de la didáctica de la Estadística* (1), 425-432. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5487240

Landín P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 12(*3*), 598-618.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, que modifica Modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Martínez, M. y Marí, M. (2010). La Distribución Binomial. Universidad Politécnica de Valencia. Recuperado de https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/7936/Distribucion%20binomial.pdf?sequence=3&isAllowed=y.

Miranda, D. (2015). Capítulo 7: Probabilidad. En J. Rodrigo (Ed.). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I: 1º Bachillerato* (pp. 276-326). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Sociales%20I.pdf.

Nortes Checa, A. (1998). Estadística y Probabilidad: Una respuesta didáctica para la Enseñanza Secundaria. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado. 32*, 59-72.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Rodríguez Muñiz, L.J. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre estadística y probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática. 14*, 65-81.

Salvador Alcaide, A., Brihuega Nieto, F.J. y Pérez Sanz, A. (1995). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.* Madrid, España. Ed: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación y Ciencia.

SERGAS (2014). *Ayuda de distribuciones probabilidad*. Recuperado de https://www.sergas.es/Saude-publica/Documents/1899/Ayuda_Epidat_4_Distribuciones_de_probabilidad_Octubre2014.pdf

Serrano Romero, L., Batanero Bernabeu, C. y Ortiz de Haro, J.J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma* 22, 43-49.

ANEXO I: Resolución de problemas para asegurar conocimientos previos

Actividad 1

La probabilidad de que un incendio haya sido provocado es de 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que si ha habido 3 incendios, los 3 hayan sido intencionados? ¿Y solo uno?

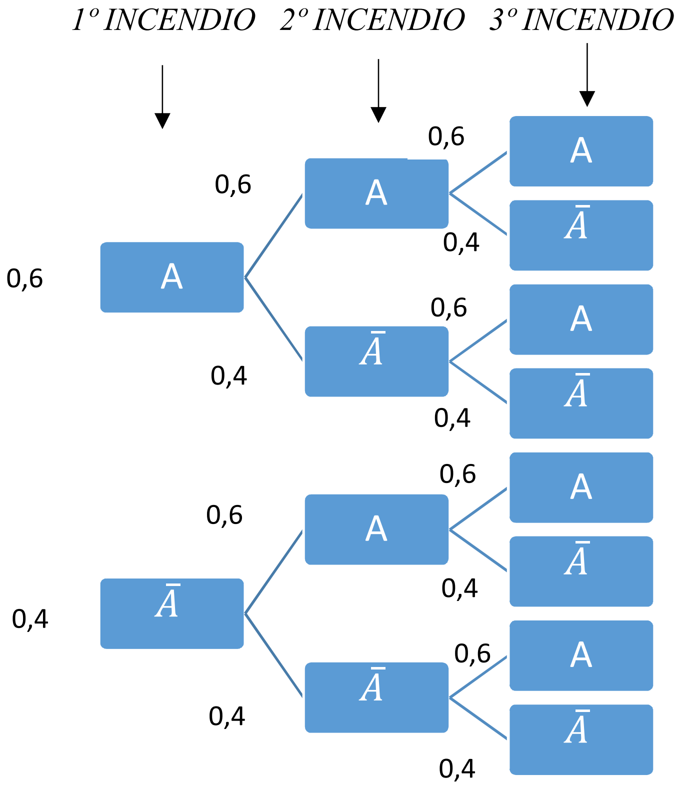
Los datos que da el problema son los siguientes:

$A \equiv$ 'incendio intencionado'

$\bar{A} \equiv$ 'incendio no intencionado'

$P(A)= 0,6 \qquad P(\bar{A})= 0,4 = 1- P(A)$

Para saber cómo se calculan las probabilidades de que los incendios sean o no provocados, se dibuja un diagrama de árbol en la que cada columna es un incendio y la probabilidad de que ocurra o no aparece en cada una de las ramas.



Hay que responder a la pregunta ¿Probabilidad de que los tres incendios sean intencionados?

Hay que calcular la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo también y el tercero también, por lo que la probabilidad es:

P(3 incendios intencionados si ha habido 3 incendios)= 0,6·0,6·0,6=0,22

En el caso segundo en el que nos preguntan que uno de los tres incendios sea intencionado, hay que calcular la probabilidad de que el primero sea intencionado y los otros dos no o que el segundo sea intencionado y los otros dos no o que el tercero sea intencionado y los otros dos no, por lo que la probabilidad es:

P(Solo 1 incendio sea intencionado si ha habido 3 incendios) = 0,6·0,6·0,4 + 0,6·0,4·0,6 + 0,4·0,6·0,6 = 0,43

<u>Actividad 2</u>

En una fábrica de muñecas la probabilidad de que alguna de ellas sea defectuosa es 0.3, por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que:

e) Al coger dos muñecas al azar ambas sean defectuosas.
f) Al coger dos muñecas al azar hay solo una defectuosa.
g) Al coger dos muñecas al azar no haya ninguna defectuosa.
h) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de que únicamente la tercera muñeca elegida sea defectuosa.

Los datos que da el problema son los siguientes, nombrando de la siguiente manera los datos:

$A \equiv$ *'muñeca sea defectuosa'*

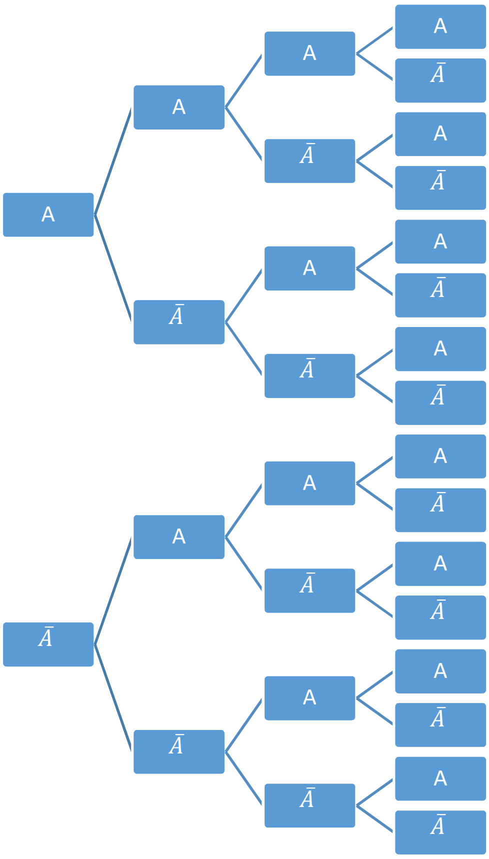
$\bar{A} \equiv$ *'muñeca no sea defectuosa'*

$P(A) = 0,3 \qquad P(\bar{A}) = 0,7 = 1 - P(A)$

Para resolver el problema y calcular las distintas probabilidades, se dibuja un diagrama de árbol en el que se indican las distintas probabilidades de desechar o no la muñeca.

El diagrama de árbol se dibuja hasta la extracción de 4 muñecas, que es el máximo que debemos calcular, pero para los primeros apartados solo se utilizarán las dos primeras columnas del diagrama de árbol.

Las probabilidades de que se deseche o no se deseche la muñeca vienen indicadas en cada rama del árbol, para facilitar el cálculo de las probabilidades.



a) *Para calcular la probabilidad solicitada se eligen las dos primeras ramas del árbol. Lo que nos pregunta el enunciado es la probabilidad de que la primera sea defectuosa y la segunda también, por ello, la probabilidad es:*

P('De coger 2 muñecas, las dos sean defectuosas') = 0,3·0,3 = 0,09

b) *Este segundo apartado hay que calcular la probabilidad de que la primera muñeca sea defectuosa y la segunda no o que la primera no sea defectuosa y la segunda sí:*

P('De coger 2 muñecas, una de las dos sea defectuosa') = 0,3·0,7+ 0,7·0,3= 0,42

c) *En la tercera probabilidad se pide que no se deseche la primera muñeca y no se deseche la segunda tampoco, por lo que:*

P('De coger 2 muñecas, ninguna sea defectuosa') = 0,7·0,7· = 0,49

d) *En este punto se pide la probabilidad de que la tercera se deseche, por lo que debe ocurrir que no se deseche la primera y no se deseche la segunda y se deseche la tercera y no se deseche la cuarta:*

P('De 4 muñecas, solamente la tercera sea defectuosa') = 0,7·0,7·0,3·0,7 = 0,10

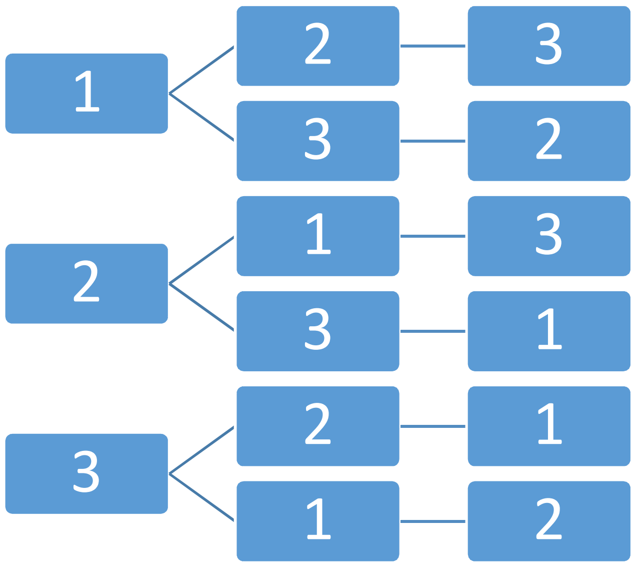
Actividad 3

En una fiesta actúan 3 grupos musicales. ¿De cuántas formas posibles se pueden ordenar su actuación?

Es una permutación de 3 elementos.

Se dibuja un diagrama de árbol con todas las posibilidades que pueden ocurrir. De esta forma se puede ver de una forma rápida cuál es la solución.

1º LUGAR   2º LUGAR   3ª LUGAR



En el diagrama de árbol se observa que son 6 posibilidades distintas.

Si se aplica la fórmula de las permutaciones: $P_3 = 3! = 6$

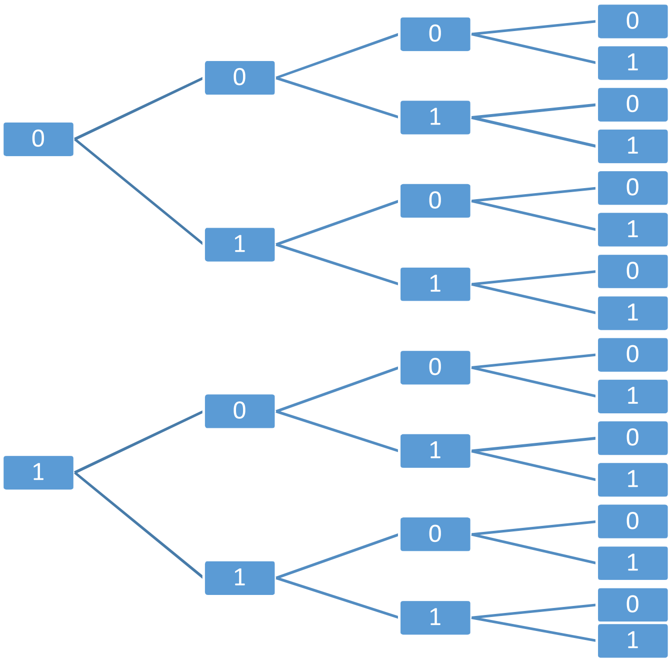
Actividad 4

Si tenemos el 0 y el 1 como símbolos ¿de cuántas formas distintas se pueden realizar tiras de 4 símbolos?

Es una variación con repetición.

Se dibuja el diagrama de árbol para poder ver todas las opciones que pueden ocurrir en la variación que se solicita con repetición. Por ello, en cada columna, vuelven a aparecer las dos opciones de 0 y 1.

POSICIÓN 1   POSICIÓN 2   POSICIÓN 3   POSICIÓN 4



Con el diagrama de árbol se ve que son 16 posibilidades las que existen.

Si se aplica la fórmula, sería: $V_{m,n} = m^n = V_{2,4} = 2^4 = 16$

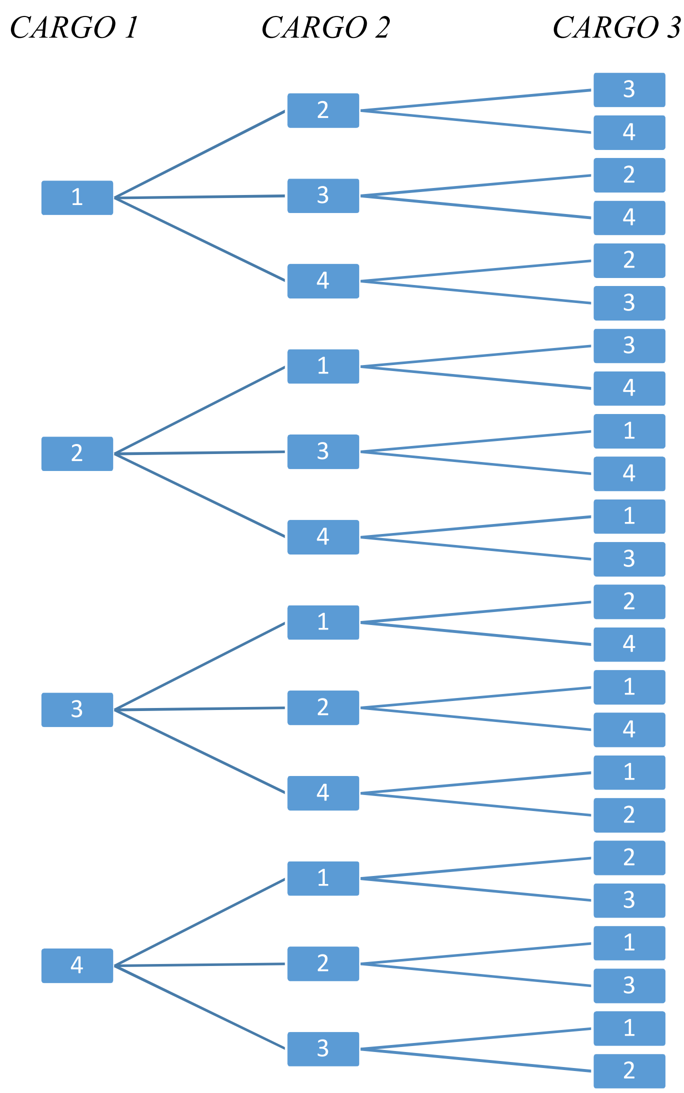
Siendo m=número de símbolos y n= número de posiciones.

<u>Actividad 5</u>

Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos: presidencia, secretaría y tesorería. Si únicamente se presentan 4 personas ¿de cuántas maneras puede estar formada la junta?

Es una variación sin repetición.

Ocurre lo mismo que en las anteriores. Se dibuja el diagrama de árbol para saber todas las opciones que tenemos, teniendo en cuenta en este ejercicio, que el que sale ya no vuelve a estar en el siguiente tramo, por lo que el diagrama de árbol queda de la siguiente manera:



En el diagrama de árbol se observan que existen 24 formas distintas de formar la junta.

Aplicando la fórmula sería: $V_{m,n} = m\ (m-1)(m-2)\ldots\ = : V_{4,3} = 4\ (4-1)(4-2)(4-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Es una variación sin reposición de 4 elementos cogidos de 3 en 3.

Siendo m= número de personas para ocupar los cargos y n=número de personas a ocupar los cargos.

Actividad 6

En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacerse?

Se denominan los paquetes de la forma A, B, C, D, E y F y se escriben las combinaciones posibles:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF

BCD, BCE, BCF, BDE,BDF, BEF.

CDE, CDF, CEF.

DEF.

Y salen 20 formas posibles de poner los libros. Si se escriben todas las posibilidades, hay que eliminar aquellas que se repite, ya que, el orden no importa.

Si se aplica la fórmula de las combinaciones: $C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$

Siendo m=número total de libros y n=número de libros en cada paquete.

Actividad 7

Calcula el resultado de los siguientes número combinatorios: $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{7}$, $\binom{9}{6}$

Para calcular estos números combinatorios, se aplica la siguiente fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{7!}{1!6!} = 7$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!(7-7)!} = \frac{7!}{7!0!} = 1$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

ANEXO II: Resolución de problemas para de razón de ser

1. Se está preparando la iluminación del evento de presentación de un nuevo producto que está relacionado con el corazón, y con ello se quiere que a primera vista se perciba una sensación de calidez. La organizadora del evento indica que se consigue con una luz roja. Disponemos para ello de 3 bombillas rojas, 3 blancas y 2 negras. Si se eligen 4 bombillas al azar. Calcula la probabilidad de que 3 sean rojas.

Se puede resolver dibujando un diagrama de árbol como en ejrcicios anteriores, pero sale muy grande, por lo que se puede ir poniendo las distintas opciones que podemos obtener. Las posibilidades de elegir las bombillas son:

RRRB RRRN RRBR RRNR RBRR RNRR BRRR NRRR

Por lo que la probabilidad de sacar 3 bolas rojas de 4 bolas es:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{120}{1680}=0{,}07$$

Cada bloque de fracciones que se multiplican se corresponden con la probabilidad que existe en elegir la bombilla del color que se indica, siendo R la roja, B la blanca y N la negra. Como nos interesan solamente elegir las 3 bombillas rojas, se suman todas las opciones que se pueden producir para hallar la probabilidad que se solicita.

2. En un estudio de la población sabemos que 7 de cada 10 personas escoge el transporte público para ir a trabajar. Si vamos a una empresa con 10 trabajadores,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 7 trabajadores que cojan el transporte público?

b) ¿Y ninguno?

c) Halla los parámetros μ(media) y σ^2 (varianza).

Los datos que nos facilitan son los siguientes:

$X_i \equiv$ *número de trabajadores que cogen el transporte público*

n=100 *p=0,7*

Es una distribución binomial, ya que nos pregunta el número de éxitos que vamos a tener, es decir, de trabajadores que usan el transporte público.

a) Para calcular la probabilidad que se solicita, se aplica la fórmula de la binomial, que es la siguiente:

P(X=k) = $\binom{n}{k}\, p^k q^{n-k}$ = *P(X=7)* = $\binom{10}{7}\, 0{,}7^7 0{,}3^{10-7} = \frac{10!}{7!\,3!}\, 0{,}7^7 0{,}3^3$ = *0.27*

Donde:

k=al número de trabajadores que usan el transporte público (el que queremos hallar la probabilidad)

p= es la probabilidad de usar el transporte público.

q= es la probabilidad de no usar el transporte público.

n= es el número total de trabajadores.

b) Para calcular esta probabilidad, es igual que el apartado a)

P(X=k) = $\binom{n}{k}\, p^k q^{n-k}$ = *P(X=0)* = $\binom{10}{0}\, 0{,}7^0 0{,}3^{10-0} = \frac{10!}{0!\,10!}\, 0{,}7^0 0{,}3^{10}$ = *0.0000059*

c) Se solicita la media (μ) *y la varianza (*σ^2*) cuyas fórmulas, por ser una distribución binomial, son las siguientes:*

$\mu = np$ = *10*$\cdot$ $0{,}7 = 7$

$\sigma^2 = npq = 10 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$

NOTA: En este caso y en otros ejercicios posteriores, la media aparece como μ *y no como* $\bar{x}$*, ya que, se está calculando la media de una distribución, que en este caso es la binomial.*

ANEXO III: Resolución de problemas para campo de problemas

CP1: Aplicación de la combinatoria del cálculo de Probabilidades.

1. ¿Sabes jugar al póker? Se reparten 5 cartas y puede haber distintas jugadas: parejas, dobles parejas, póker,.. Calcula la probabilidad de obtener un póker de ases servido. NOTA: Póker de ases servido es que en el reparto de las 5 cartas, 4 de ellas sean iguales: 4 ases, 4 doses…

La interpretación de los datos es la siguiente:

A≡'Póker de ases servido' por lo que se pide calcular P(A), y para calcularla, hay que aplicar la Regla de Laplace:

$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

- *Número de casos favorables*

$$\{As, As, As, As, otra\ carta\}$$

El mazo está compuesto por 40 cartas, de las cuales los ases son fijos para obtener el póker de ases, por lo que 40-4=36 es el total de cartas que quedan libres, por lo tanto son 36 posibilidades distintas de resultados.

$$\{As, As, As, As, dos\ de\ copas\}$$
$$\{As, As, As, As, dos\ de\ oros\}$$
$$\{As, As, As, As, dos\ de\ espadas\}$$
$$\vdots$$

Por lo tanto, número de casos favorables = 36.

- *Número de casos posibles*

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!35!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 658008$$

- *Regla de Laplace*

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{36}{658008}$$

CP2: Obtener la distribución estadística y la distribución de probabilidad de una variable y los parámetros μ y σ.

2. Tenemos un dado legal en el que las puntuaciones que se pueden obtener son del 1 al 6 ($\boldsymbol{X_i}$) Lanzamos 100 veces un dado obteniendo las siguientes frecuencias, es decir las veces que ha ocurrido $\boldsymbol{X_i}$ ($\boldsymbol{f_i}$):

$\boldsymbol{X_i}$	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{f_i}$	19	16	15	21	17	12

Calcula:

i. La distribución de frecuencias absolutas. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

ii. La distribución de frecuencias relativas. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

iii. La distribución de probabilidad. Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica). Dibuja su diagrama de barras.

a) Distribución de frecuencias absolutas

X_i	f_i
1	*19*
2	*16*
3	*15*
4	*21*
5	*17*
6	*12*
	100

El enunciado del problema ya nos da los datos de las frecuencias absolutas, por lo que solo falta el cálculo de los parámetros solicitados:

n = 100

n es el número de lanzamientos que se realizan.

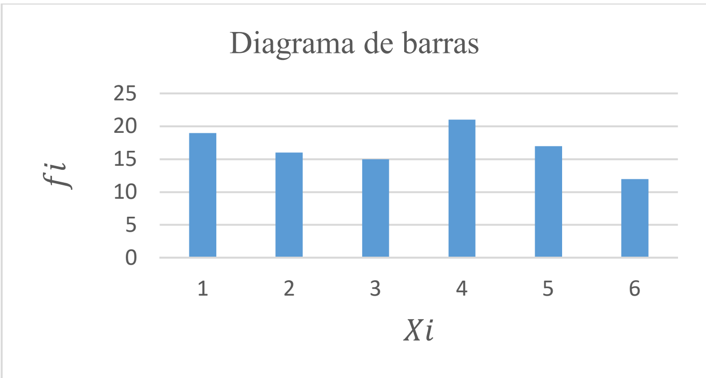
X_i	f_i	$X_i \; f_i$	$X_i^2 \; f_i$
1	*19*	*19*	*19*
2	*16*	*32*	*64*
3	*15*	*45*	*135*
4	*21*	*84*	*336*
5	*17*	*85*	*425*
6	*12*	*72*	*432*
	100	*337*	*1411*

$$\bar{x} = \sum \frac{x_i}{n} f_i = \frac{337}{100} = 3{,}37$$

$$\sigma^2 = \sum \frac{X_i^2 f_i}{n} = \frac{1411}{100} = 14{,}11$$

$$\sigma = \sqrt{14{,}11} = 3{,}76$$

NOTA: La media aparece como $\bar{x}$ porque es una media muestral. Para las distribuciones de variables discretas o continuas se utiliza el parámetro μ.



b) *Distribución de frecuencias relativas*

X_i	f_i	$f_{ri} = {}^{f_i}/_{n}$
1	*19*	*0,19*
2	*16*	*0,16*
3	*15*	*0,15*
4	*21*	*0,21*
5	*17*	*0,17*
6	*12*	*0,12*
	100	*1*

f_{ri} = *frecuencia relativa i-ésima.*

Y se calculan los parámetros, como se ha hecho anteriormente:

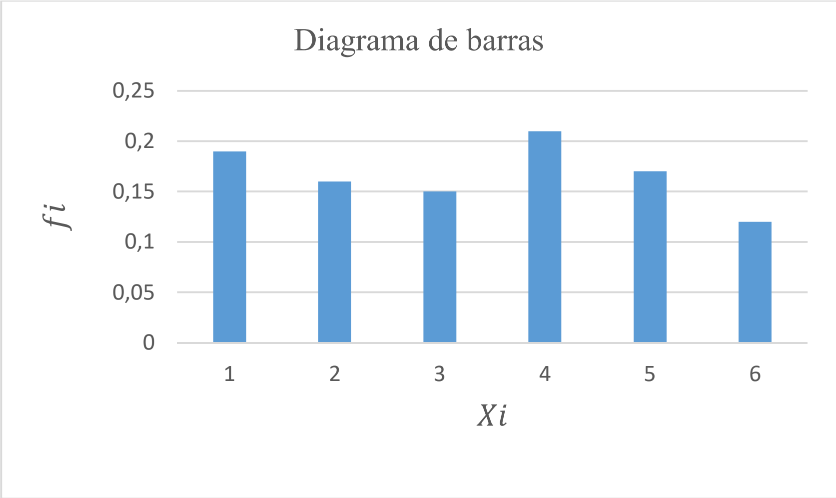
X_i	f_i	$f_{ri} = {}^{f_i}/_{n}$	$X_i \;\; f_{ri}$	$X_i^2 \;\; f_{ri}$
1	*19*	*0,19*	*0,19*	*0,19*
2	*16*	*0,16*	*0,32*	*0,64*
3	*15*	*0,15*	*0,45*	*1,35*
4	*21*	*0,21*	*0,84*	*3,36*
5	*17*	*0,17*	*0,85*	*4,25*
6	*12*	*0,12*	*0,72*	*4,32*
	100	*1*	*3,37*	*14,11*

$$\bar{x} = \sum x_i f_{ri} = 3{,}37$$

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 f_{ri} = 14{,}11$$

$$\sigma = \sqrt{14{,}11} = 3{,}76$$

NOTA: La media aparece como $\overline{x}$ porque es una media muestral. Para las distribuciones de variables discretas o continuas se utiliza el parámetro μ.



c) Distribución de probabilidad

Lo primero es saber cuáles son las probabilidades de sacar cada puntuación del dado. Como es un dado legal, la probabilidad de cualquiera de las puntuaciones es 1/6, es decir:

P(1) = 1/6; P(2) = 1/6; P(3) = 1/6; P(4) = 1/6; P(5) = 1/6; P(6) = 1/6

Ahora se construye la tabla de probabilidades, de la misma forma que en los apartados anteriores:

X_i	p_i
1	1/6 = 0,17
2	1/6 = 0,17
3	1/6 = 0,17
4	1/6 = 0,17
5	1/6 = 0,17
6	1/6 = 0,17

Se calculan los datos que nos interesan para la media y la desviación típica:

X_i	p_i	$X_i \quad p_i$	$X_i^2 \quad p_i$
1	*1/6 = 0,17*	*0,17*	*0,17*
2	*1/6 = 0,17*	*0,34*	*0,68*
3	*1/6 = 0,17*	*0,51*	*1,53*
4	*1/6 = 0,17*	*0,68*	*2,72*
5	*1/6 = 0,17*	*0,85*	*4,25*
6	*1/6 = 0,17*	*1,02*	*6,12*
		3,57	*15,47*

Se calculan la media y la desviación típica:

$$\bar{x} = \sum x_i p_i = 3{,}57$$

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 p_i = 15{,}47$$

$$\sigma = \sqrt{15{,}47} = 3{,}94$$

NOTAS: La diferencia de este último apartado con respecto a los anteriores es por la toma de decimales.

La media aparece como $\bar{x}$ porque es una media muestral. Para las distribuciones de variables discretas o continuas se utiliza el parámetro μ.

<u>CP3: Obtener la probabilidad de éxito de la distribución, es decir, calcular las probabilidades de una distribución binomial.</u>

3. Se lanza una moneda trucada 3 veces. Llamamos éxito a que salga cara. Escribe la distribución de probabilidad sabiendo que la probabilidad de sacar cara es de 0,6. (Caro, 2015, p.330).

Éxito ≡ 'salir cara'.

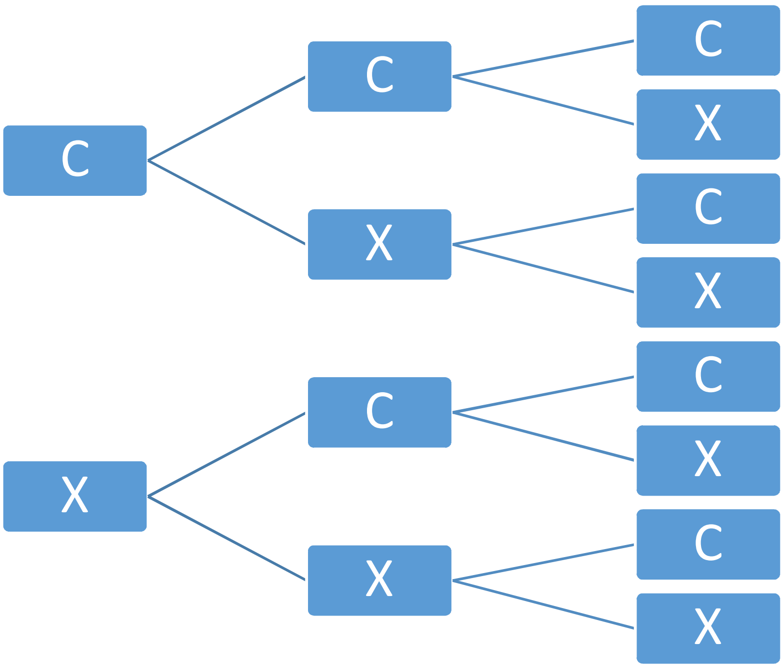
n = 3

¿Distribución de probabilidad?

Se dibuja el diagrama de árbol para ver las probabilidades:

P('cara') =0,6 *P('cruz')= 0,4*

LANZAMIENTO 1 *LANZAMIENTO 2* *LANZAMIENTO 3*



Probabilidades:

Nº de éxitos	*0*	*1*	*2*	*3*
Probabilidad	*0,064*	*0,288*	*0,432*	*0,216*

Para calcular la tabla de probabilidades, se van calculando las distintas opciones que debemos completar:

La probabilidad que en ninguna de las tres tiradas salga cara, es decir, salga cruz la primera y la segunda y la tercera:

$P(0) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = (0{,}4)^3 = q^3 \cdot C_{3,0} = p^0 \cdot q^3 \binom{3}{0} = 0{,}064.$

Para el segundo es que salga 1 cara, que puede ocurrir que salga la primera cara y las otras dos cruz o la segunda cara y las otras dos cruz o la tercera cara y las otras dos cruz:

$P(1) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 3 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^2 = p^1 \cdot q^2 \cdot \binom{3}{1} = 0{,}288.$

En la tercera columna es que salgan las dos primeras caras y la tercera no o que salgan cara la primera y la tercera y la segunda cruz o que sean cara la segunda y tercera y la primera cruz:

P(2) = 0,6 · 0,6 · 0,4 + 0,6 · 0,4 · 0,6 + 0,4 · 0,6 · 0,6 = 3 · $(0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^1 = p^2 \cdot q^1 \cdot \binom{3}{2}$ *= 0,432.*

Y en el último apartado, deben salir las tres caras, por lo que el resultado es:

P(3) = 0,6 · 0,6 · 0,6 = $(0{,}6)^3 = p^3 \cdot q^0 \cdot \binom{3}{3}$*= 0.216.*

4. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es :

Sexo recién nacido	Chica	Chico
Probabilidad	0,485	0,515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés ¿cuál es la probabilidad de que nazcan 7 chicas?

El problema se plantea identificando la variable

X≡ Recién nacido sea chica

Y lo que nos preguntan es la P(X=7), es decir k es el número de chicas que queremos saber la probabilidad.

Se conoce el número de bebés n=10

La probabilidad de que sea chica p= 0,485 y la de que sea chico q=0,515

Se aplica la fórmula de la binomial

P(X=k) = $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ *= P(X=7) =* $\binom{10}{7} 0{,}485^7 0{,}515^{10-7} = \frac{10!}{7!3!} 0{,}485^7 0{,}515^3$ *= 0,1035*

5. En un estudio de la población sabemos que 7 de cada 10 personas usa desodorante diariamente. Si vamos a una empresa con 100 trabajadores:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 75 trabajadores que usen desodorante?
b. ¿Y ninguno?
c. Halla los parámetros μ(media) y σ (desviación típica).

De los datos que nos da el problema deducimos lo siguiente:

a) X≡ número de personas que usan desodorante

¿P(X=75)?, la probabilidad de que 75 trabajadores (k) usen desodorante

Número de trabajadores que tenemos n=100

La probabilidad de que use desodorante p= 0,7 y de que no lo use q=0,3

Se aplica la fórmula de la binomial

P(X=k) = $\binom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$ = *P(X=75)* = $\binom{100}{75}\ (0{,}7)^{75}(0{,}3)^{100-75}$ = $\frac{100!}{75!\,25!}$ $(0{,}7)^{75}(0{,}3)^{25}$ = *0,0496*

b) Lo mismo ocurre para calcular la probabilidad de que no use ninguno desodorante

P(X=k) = $\binom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$ = *P(X=0)* = $\binom{100}{0}\ (0{,}7)^{0}(0{,}3)^{100-0}$ = $\frac{100!}{0!\,100!}$ $(0{,}7)^{0}(0{,}3)^{100}$ = *5,1538* $\cdot 10^{-53}$

El resultado es tan pequeño que se podría asegurar que la probabilidad es 0.

c) Al ser una distribución binomial, calculamos la media y la desviación típica con las fórmulas que se facilitan, siendo μ la media de la distribución binomial.

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$\mu = 100\ \cdot 0{,}7$ = *70 personas usan desodorante de media*

$\sigma = \sqrt{100\ \cdot 0{,}7\ \cdot 0{,}3}$ = *4,5826*

ANEXO IV: Resolución de tipos de problemas de técnicas

1. Se quiere jugar a la quiniela de fútbol. Para ello sabemos que hay tres posibilidades de respuesta: 1 si gana el equipo local, X si empatan los dos equipos y 2 si gana el equipo visitante. Además, el máximo de partidos que aparece en la quiniela son 14. Queremos averiguar cuál es la probabilidad de acertar una quiniela de 14. (Miranda, 2015, p.306).

T1: Combinatoria y T2: Regla de Laplace

Para calcular la probabilidad se debe aplicar la Regla de Laplace, para lo que se define:

A≡ acertar una quiniela de 14.

Por lo tanto, P(A) = $\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

En este caso definimos como casos favorables el acertar, que solo ocurre una vez, por lo que el número de casos favorables es 1.

Para saber los casos posibles vemos las opciones que tenemos. Cuando se juega a la quiniela solamente hay tres posibilidades de respuesta: 1, X y 2, y que se pueden ir alternando en cada una de las 14 veces que hay que pronosticar el resultado, por lo que para calcularlo aplicaríamos combinatoria con variaciones de 3 elementos tomados de 14 en 14, o sea, $V_{3,14}$=3^{14}*= 4.782.969.*

Por lo tanto la P(A) = $\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$=$\frac{1}{4.782.969}$

2. Se está disputando el campeonato del Bajo Gállego de petanca entre los equipos de las localidades de San Mateo, Villanueva y Zuera. ¿Cuál es la probabilidad de que Villanueva quede segunda?

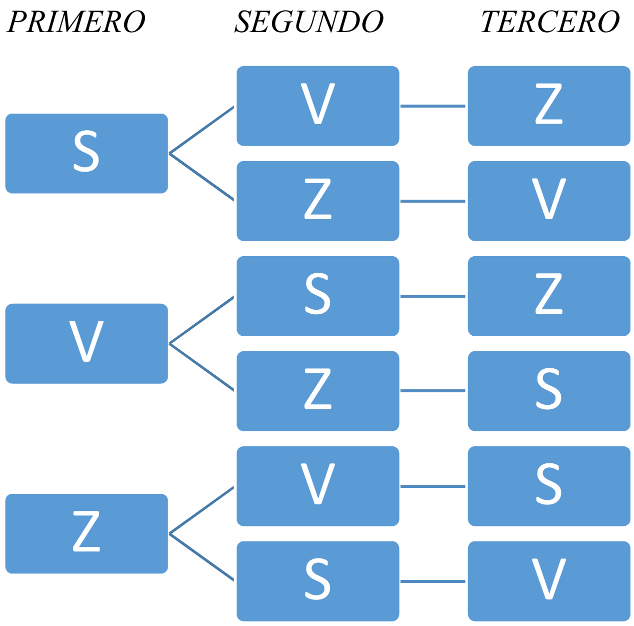
Para calcular la probabilidad se debe aplicar la Regla de Laplace, para lo que se define:

A≡ Villanueva quede segundo.

Por lo tanto, P(A) = $\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

Los casos posibles sabemos que son los siguientes:

SVZ SZV VSZ VZS ZVS ZSV por lo que son 6 posibles opciones También se puede ver dibujando el diagrama de árbol correspondiente:



Se observa que son permutaciones de 3 elementos que también se calcularía haciendo $P_3 = 3! = 6$.

En este caso definimos como caso favorables el quedar segundo, por lo que vemos que de todas las posibilidades que pueden darse solo hay dos que la cumplan, por lo tanto:

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

> 3. Se está celebrando el concurso de talentos de hip hop de la ciudad de Zaragoza en la que en la fase final se encuentran cuatro grupos: Rasmia (R), Lokura (L), Adelante (A) y Zarahop (Z). ¿Cuál es la probabilidad de que Lokura actúe en último lugar siendo el sorteo al azar?

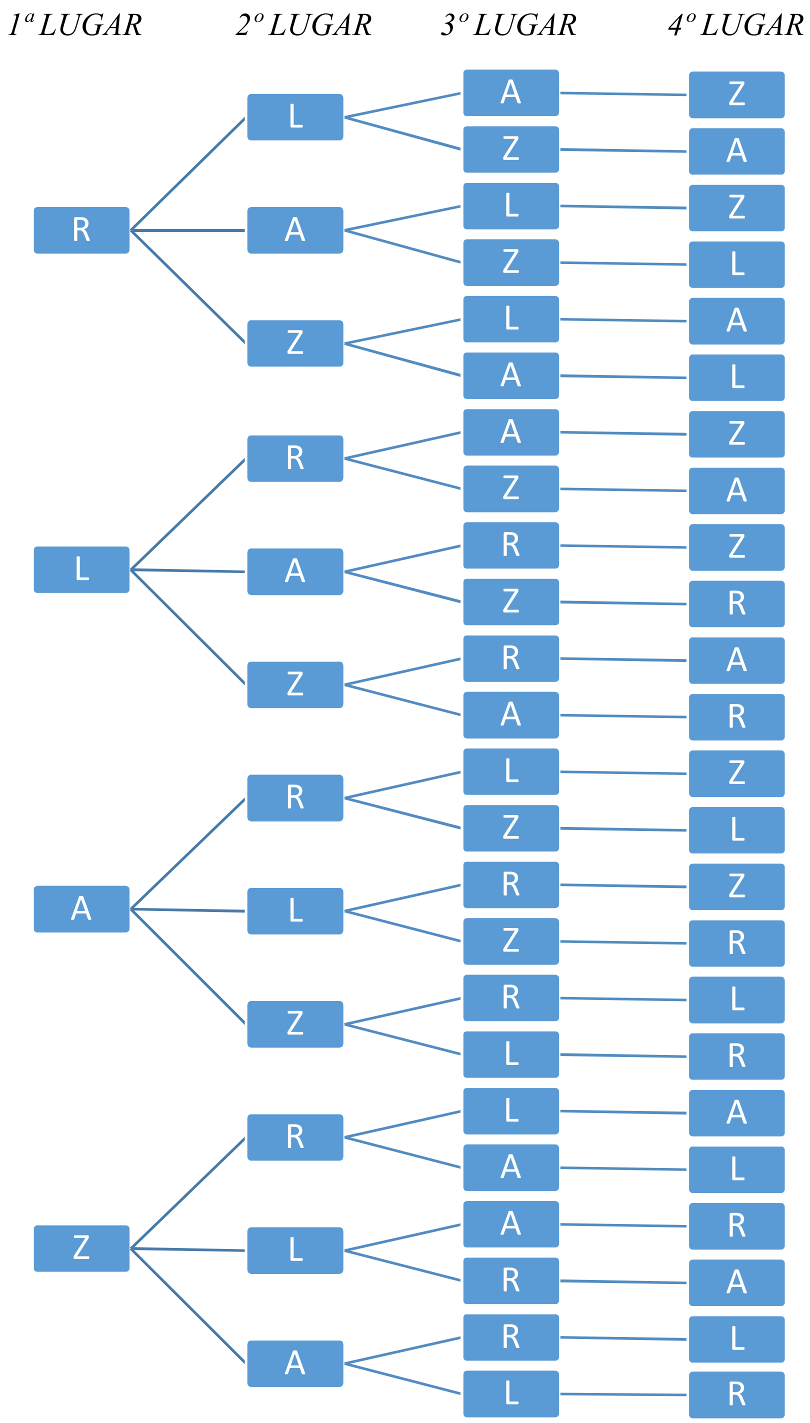
T3. Diagramas de árbol

Se dibuja el diagrama de árbol, en el que se indican todas las posibilidades que pueden ocurrir a la hora de realizar el sorteo.

La pregunta que se plantea en el problema es cuál es la probabilidad de que el grupo Lokura actúe en último lugar.

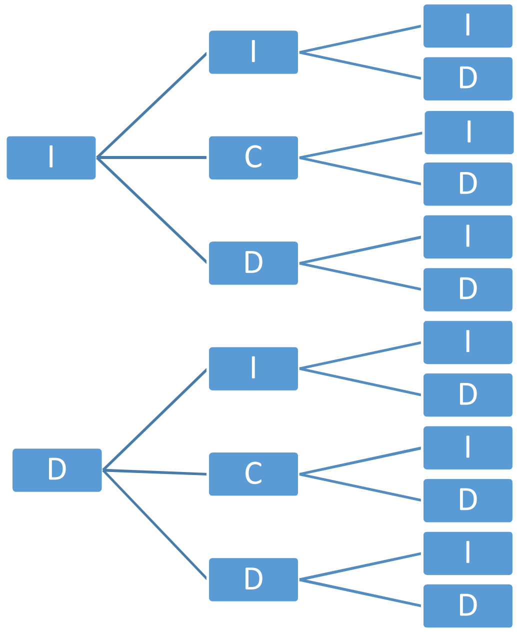
Como se puede observar en el diagrama de árbol, son varias las opciones que se pueden encontrar en el total de posibilidades. Si aplicamos la Regla de Laplace para calcular la probabilidad obtenemos siendo,

A≡Lokura actúe en último lugar *entonces,* $P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$


1ª LUGAR
2º LUGAR
3º LUGAR
4º LUGAR
R
L
A
Z
L
A
Z
R
A
Z
R
L
Z
R
L
A
A
Z
L
Z
L
A
A
Z
R
Z
R
A
L
Z
R
Z
R
L
L
A
A
R
R
L
Z
A
Z
L
A
L
Z
A
Z
R
A
R
Z
L
Z
R
L
R
A
L
R
A
L
R

4. En una competición en la que se debe encontrar la salida de un bosque eligiendo correctamente los caminos que se deben elegir. Presentando el siguiente "mapa" del bosque si elegimos un camino al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el que resulte de elegir siempre el camino de la izquierda?

BIF. 1 *BIF. 2* *BIF. 3*



La probabilidad de elegir un camino en la bifurcación 1 es $\frac{1}{2}$ *en la bifurcación 2 es* $\frac{1}{3}$ *y en la bifurcación 3 es* $\frac{1}{2}$*. Se observa en el diagrama de árbol que solamente hay una opción en la que significa elegir siempre el camino de la izquierda, por lo que si definimos A≡elegir salida por caminos de la izquierda, para calcular P(A) hacemos lo siguiente:*

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

T4. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de probabilidad; T5. Representar mediante Diagrama de barras; T6. Aplicación de las fórmulas de media y varianza.

5. Se lanzan dos monedas y se cuentan el número de caras, obtenido la siguiente distribución de probabilidad

X_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Calcula media y desviación típica de la distribución de probabilidad. (Caro, R. (2015)).

X_i	p_i	$X_i p_i$	$X_i^2 p_i$
0	*0,25*	*0*	*0*
1	*0,50*	*0,50*	*0,50*
2	*0,25*	*0,50*	*1*
	1	*1*	*1,50*

Se aplican las fórmulas para el cálculo de las probabilidades.

Siendo la media:

$$\bar{x} = \sum x_i p_i = 1$$

La varianza:

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 p_i = 1{,}50$$

Y la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{1{,}50} = 1{,}22$$

Obteniendo de resultado una media de 1 cara y de varianza 1,50 que para movernos en valores de 0 y 2 se podría considerar una variabilidad muy alta, es decir, no todos los valores están cercanos a la media.

6. Se realiza un estudio en una localidad a 100 familias, para conocer el número de hijos (X_i) que tienen las familias. El resultado de la toma de datos es el siguiente:

$\boldsymbol{X_i}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{f_i}$	15	25	30	22	5	3

c) Halla la media y la varianza de esta distribución y dibuja su diagrama de barras.

d) Si sabemos que las probabilidades de tener hijos están en la siguiente tabla, halla la media, la varianza de la distribución de probabilidad.

$\boldsymbol{X_i}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{p_i}$	0,2	0,2	0,35	0,2	0,10	0,05

a) De los datos del problema sabemos que el número de familias elegidas para el estudio es 100 = n.

En el propio enunciado se define X≡hijos en cada familia,

siendo además $\boldsymbol{f_i}$ *≡el número de familias que tienen* X_i *hijos*

Por lo tanto, se procede a hallar la media y la varianza solicitadas.

Siendo:

$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{f_i}$	$\boldsymbol{X_i f_i}$	$\boldsymbol{X_i^2 f_i}$
0	*15*	*0*	*0*
1	*25*	*25*	*25*
2	*30*	*60*	*120*
3	*22*	*66*	*198*
4	*5*	*20*	*80*
5	*3*	*15*	*75*
	100	*186*	*498*

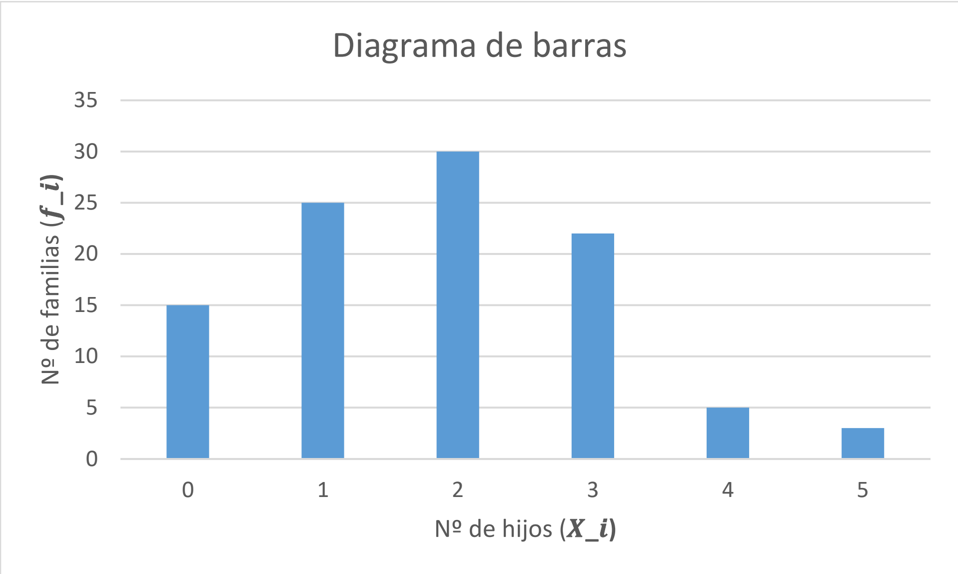
Se calcula la media y la varianza:

$$\bar{x} = \sum \frac{X_i \cdot f_i}{n} = \frac{186}{100} = 1{,}86$$

$$\sigma^2 = \sum \frac{X_i^2 f_i}{N} = \frac{498}{100} = 4{,}98$$

El resultado es que hay 1,86 niños de media por familia y con una varianza de 4,98, es decir, una dispersión bastante alta.

El diagrama de barras, que realiza la representación gráfica de estos datos es la siguiente:



b) Para el cálculo de la distribución de probabilidad

X_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,15	0,30	0,2	0,10	0,05

X_i	p_i	$X_i p_i$	$X_i^2 p_i$
0	*0,2*	*0*	*0*
1	*0,15*	*0,15*	*0,15*
2	*0,30*	*0,6*	*1,2*
3	*0,2*	*0,6*	*1,8*
4	*0,1*	*0,4*	*1,6*
5	*0,05*	*0,25*	*1,25*
	1	*2*	*6*

Se aplican las fórmulas para el cálculo de las probabilidades.

$$\bar{x}= \sum x_i p_i = 2$$

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 p_i = 6$$

Obteniendo de resultado una media de 2 hijos por familia y una varianza de 6, siendo también una variabilidad muy alta para los números en los que se ha trabajado.

T7. Desarrollo de las Fórmulas de la distribución binomial.

> 7. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Halla la probabilidad de que en una caja haya los siguientes números de tornillos defectuosos:
>
> a) Ninguno.
>
> b) Uno.
>
> c) Más de dos.
>
> (Colera, et al., 2015, p. 255)

De los datos que facilita el problema se obtiene lo siguiente:

Tornillos defectuosos = 2% donde p= 0,02.

Por lo tanto q= 0,98.

La variable X≡número de tornillos defectuosos en la caja de 50.

Y se no dice que el número total de tornillos que hay es 50, por lo que n=50.

Por lo tanto, con estos datos ya estamos en disposición de calcular las probabilidades:

P(X=k) = $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

a) *En este caso k=0, porque nos pide P(X=0).*

P(X=k) = $\binom{n}{k}$ $p^k q^{n-k}$= *P(X=0)* = $\binom{50}{0}$ $(0{,}02)^0(0{,}98)^{50-}$ = $\frac{50!}{0!50!}$ $(0{,}02)^0(0{,}98)^{50}$*=0,36.*

b) *En este caso k=1 , por lo que hay que calcular P(X=1)*

P(X=k) = $\binom{n}{k}$ $p^k q^{n-k}$= *P(X=1)* = $\binom{50}{1}$ $(0{,}02)^1(0{,}98)^{50-1}$= $\frac{50!}{1!49!}$ $(0{,}02)^1(0{,}98)^{49}$*=0,37*

c) *En esta probabilidad se solicita que se calcule P(X>2).*

Para este cálculo es muy complicado realizar tal y como se pide la P(X>2), ya que son infinitas operaciones, pero hay una forma de poder calcularla correctamente y es aplicando lo siguiente;

P(X>2)=1-[P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)]

Las probabilidades P(X=0) y P(X=1) ya se han calculado, por lo que solo hay que calcular P(X=2) y ya se podrá calcular lo que nos piden. Por lo tanto,

$$P(X=2) = \binom{50}{2}(0{,}02)^2(0{,}98)^{50-2} = \frac{50!}{2!48!}(0{,}02)^2(0{,}98)^{48} = 0{,}19.$$

Y la P(X>2)=1-[P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)]= 1-[0,36+0.37+0.19]=1-0.92=0.08.

8. En el estudio de una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que las curaciones completas alcanzan el 80% de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan? ¿Cuál sería la desviación típica de la distribución?

En este caso el problema lo que está solicitando es el cálculo de la media (μ) de la distribución en primer lugar y después la desviación típica (σ), cuyas fórmulas son las siguientes:

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Del enunciado del problema se obtienen los siguientes datos:

X≡número de curaciones de enfermos

80% de los casos se curan, por lo que p=0,8 y de ahí se deduce que q=0,2.

Se facilita el dato de que se administra a 1000 enfermos, por lo que n=1000.

Y con estos datos se calculan los parámetros solicitados:

$\mu = np$ *= 1000·0,8=800 enfermos se curan.*

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}$ *= 12,65 enfermos.*

ANEXO V: Resolución de prueba de evaluación

Problema 1:

Elisa es jugadora del equipo de fútbol de su localidad y este fin de semana tiene el partido más importante de la temporada, la final de la Copa en la que se enfrentan a uno de los mejores equipos que ha habido este año. Elisa tiene miedo a que se decida en la tanda de penaltis, ya que sabe, que es jugársela a la suerte (según ella). De las 11 jugadoras que tiene el equipo en campo, hay 4 que son las mejores lanzadoras. Calcula la probabilidad de que si se escoge al azar el equipo de tiradoras en la primera tanda de penaltis, estén las 4 mejores. NOTA: Primera tanda de penaltis son 5 tiros.

A≡' Equipo tiradoras con las 4 mejores del equipo' *Calcular P(A)*

$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

- *Casos favorables*

$\{jugadora\ 1, jugadora\ 2, jugadora\ 3, jugadora\ 4, jugadora\ 5\}$

El equipo que puede lanzar los penaltis está compuesto por 11 jugadoras, de las cuales 4 son fijas, por lo que 11-4=7 jugadoras que quedan libres para poder hacer los equipos, es decir, son 7 formas distintas de poder realizar el equipo de lanzamiento.

Por lo tanto, el número de casos favorables = 7.

- *Casos posibles*

$C_{11,5} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 462$

- *Regla de Laplace*

$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{7}{462} = 0{,}015$

Problema 2:

Desde la asociación de estudiantes se ha decidido realizar un sorteo entre los estudiantes de la clase de 1º de Bachillerato, de un regalo que ha sido entregado por el AMPA. Para ello, se decide realizar un sorteo de una forma original, por lo que se introducen en una bolsa puntos del 1 al 4, el número de veces que aparece en la tabla siguiente:

X_i	1	2	3	4
f_i	4	3	2	1

El premio se lo lleva quien más puntos consiga. Con todo esto, calcula:

a) La distribución de probabilidad.

b) Halla $\bar{X}$ (media), σ^2(varianza) y σ (desviación típica).

c) Dibuja su diagrama de barras.

d) ¿Cuál crees que será la puntuación que más salga?

a) Distribución de probabilidad

Lo primero es saber cuáles son las probabilidades de sacar cada número:

P(1) = 4/10; P(2) = 3/10; P(3) = 2/10; P(4) = 1/10;

Se construye la tabla de probabilidades:

X_i	p_i
1	4/10= 0,4
2	3/10 = 0,3
3	2/10 = 0,2
4	1/10 = 0,1

X_i	p_i	$X_i\ p_i$	$X_i^2\ p_i$
1	*0,4*	*0,4*	*0,4*
2	*0,3*	*0,6*	*1,2*
3	*0,2*	*0,6*	*1,8*
4	*0,1*	*0,4*	*1,6*
		2,0	*5,0*

b)

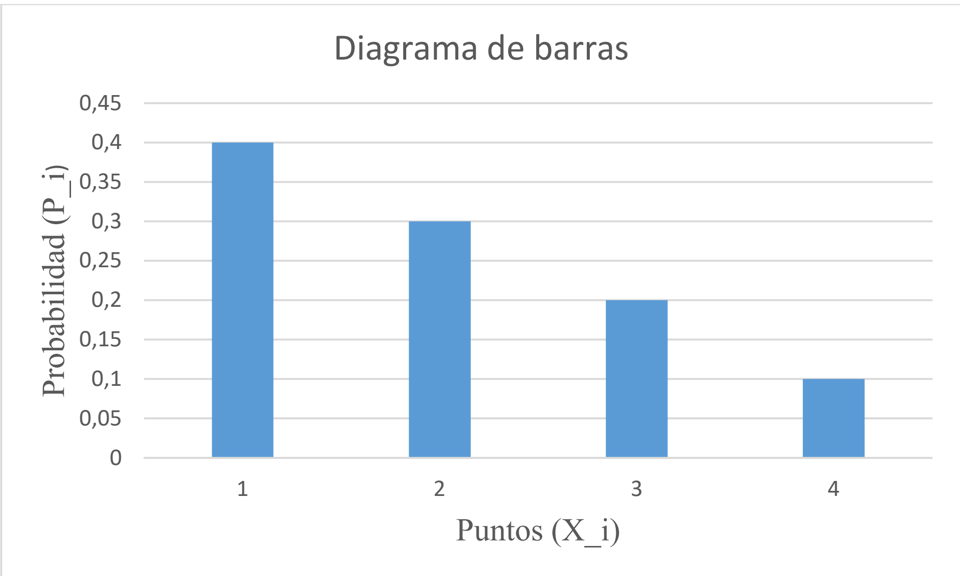
$$\overline{x} = \sum x_i p_i = 2$$

$$\sigma^2 = \sum X_i^2 p_i = 5$$

$$\sigma = \sqrt{5} = 2{,}24$$

NOTA: La media aparece como $\overline{x}$ porque es una media muestral. Para las distribuciones de variables discretas o continuas se utiliza el parámetro μ.

c) Diagrama de Barras



d) *Existe mayor probabilidad en sacar una puntuación de 1.*

Problema 3:

Según un estudio realizado por estudiantes, la probabilidad de tener un teléfono móvil a la edad de 10 años es de 70%. En una clase de 20 alumnos de esa edad ¿Cuál es la probabilidad de que tengan teléfono móvil 15?

¿Cuál crees que será la puntuación que más salga?

Para resolver el problema, lo que nos pide es la probabilidad de que 15 estudiantes tengan teléfono móvil.

Del enunciado del problema sacamos los siguientes datos:

X≡número de alumnos con teléfono móvil

La probabilidad de tenerlo es el 70% por lo que p=0,7 y de ahí se deduce que q=1-0,7=0,3.

El número de alumnos de esas edad que está en estudio es 20=n.

Por lo tanto, aplicando la fórmula, nos da lo siguiente:

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = P(X=15) = \binom{20}{15} (0,7)^{15}(0,3)^{20-1} = \frac{20!}{15!5!} (0,7)^{15}(0,3)^5 = 0,1789$

Problema 4:

Se ha comprado un paquete 25 mascarillas en el supermercado, elaborados por una fábrica que ha comprobado que el 95% de las que produce no tienen ningún defecto. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa? Calcula Media y desviación típica.

X≡ número de mascarillas en buen estado

Del enunciado además se consiguen los siguientes datos:

El número que se va a someter al estudio es 25=n.

LA probabilidad p=0,95 y q=0,05.

Y k= 25, ya que lo que nos piden es que no haya ninguna defectuosa. Al definir X como mascarillas en buen estado ese es su valor. Si hubiéramos definido X como mascarillas defectuosas el valor de k sería 0.

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = P(X=25) = \binom{25}{25} (0,95)^{25}(0,05)^0 = 0,2773$

Y para el cálculo de los parámetros utilizando las fórmulas de la media (μ) y la desviación típica (σ) de la distribución binomial, que son las siguientes:

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$\mu = np$ *= 25·0,95 = 23,75 mascarillas en buen estado.*

$\sigma = \sqrt{npq}$ = $\sqrt{25 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}$ *= 1,0897 mascarillas.*